Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences [...]

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur la définition d'une connexion affine.* Note (*) de M. **Vasile Cruceanu**, présentée par M. René Garnier.

On donne une nouvelle définition globale pour une connexion affine et l'on détermine la structure algébrique de l'ensemble des connexions linéaires et affines sur une variété différentiable.

1. Soit V un module vectoriel sur l'anneau K et A un ensemble quelconque des éléments nommés points.

Définition 1.1. — Nous disons que l'ensemble A est un *module affine* associé au module vectoriel V sur l'anneau K s'il existe une application $h : A \times A \to V$ satisfaisant aux conditions :

1. $\forall$ P, Q, $R \in A : h(P, Q) + h(Q, R) = h(P, R)$;

2. $\exists$ $O \in A$, tel que l'application $\varphi : A \to V$ définie par $\varphi(P) = h(O, P)$, pour tout $P \in A$, est une bijection.

Nous utiliserons dans ce qui suit la notation $h(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$.

Soient A et A' deux modules affines associés respectivement aux modules vectoriels V et V' sur le même anneau K.

Définition 1.2. — On dit que l'application $f : A \to A'$ est K-*affine* (homomorphisme) s'il existe un point $O \in A$ tel que l'application $f^* : V \to V'$ définie par la condition

$$f^*(X) = X' \iff X = \overrightarrow{OP} \quad \text{et} \quad X' = \overrightarrow{f(O)f(P)} \tag{1}$$

soit K-linéaire.

2. Soit M une variété différentiable de classe C^∞, $\mathcal{F}$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ et $\mathcal{D}^r_s$ le $\mathcal{F}$-module vectoriel des champs de tenseurs du type (r, s) et classe C^∞ sur M. Pour tout ensemble E soit F(E) l'ensemble des applications de E en E.

Définition 2.1. — On appelle [1] *connexion linéaire* sur la variété M une application $\nabla : \mathcal{D}^1 \to F(\mathcal{D}^1)$ satisfaisant aux conditions :

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

2. $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$;

3. $\nabla_X(fY) = Xf.Y + f\nabla_X Y$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{D}^1$, $\forall f, g \in \mathcal{F}$.

En associant à chaque couple ordonné de connexions linéaires ∇, ∇' sur M, le champ de tenseurs $S \in \mathcal{D}^1_2$ défini par la relation

$$S(X, Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y, \tag{2}$$

on obtient les résultats :

Théorème 2.1. — *L'ensemble* $\mathcal{L}(M)$ *des connexions linéaires sur* M *est un module affine associé au module vectoriel* $\mathcal{D}^1_2$ *sur* $\mathcal{F}$.

Théorème 2.2. — *Toute métrique riemannienne sur une variété compacte et orientable* M, *détermine une structure euclidienne sur* $\mathcal{L}(M)$, *considéré comme espace affine sur le champ* R *des réels.*

THÉORÈME 2.3. — *Tout difféomorphisme d'une variété* M *sur une variété* M' *détermine un isomorphisme de* $\mathcal{L}(M)$ *sur* $\mathcal{L}(M')$.

3. Soit p un point de M et A_p l'espace tangent à M en p, doué de la structure naturelle d'espace affine sur R.

DÉFINITION 3.1. — On appelle *champ de points de classe* C^∞ sur M, une fonction qui associe à chaque point $p \in M$ un point $P \in A_p$ tel que le champ de vecteurs $X = \overrightarrow{pP}$ soit de classe C^∞. On obtient le

THÉORÈME 3.1. — *L'ensemble* $\mathfrak{X}$ *des champs de points de classe* C^∞ *sur* M *est un module affine associé au module vectoriel* $\mathcal{D}^1$ *sur* $\mathcal{F}$.

4. Soit $D : \mathfrak{X} \to F(\mathfrak{X})$ une fonction qui associe à tout champ $P \in \mathfrak{X}$ une application $D_P : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$. Cette fonction induit les applications $\nabla : \mathcal{D}^1 \to F(\mathcal{D}^1)$ et $K : \mathcal{D}^1 \to \mathcal{D}^1$ définies de la manière suivante :

Pour X, $Y \in \mathcal{D}^1$ et P, $Q \in \mathfrak{X}$ tels que $X = \overrightarrow{pP}$ et $Y = \overrightarrow{pQ}$, nous mettons

$$(3) \qquad \nabla_X Y = \overrightarrow{QD_P(Q)} - \overrightarrow{p\,D_P(p)} \qquad \text{et} \qquad K(X) = \overrightarrow{p\,D_P(p)}.$$

DÉFINITION 4.1. — Nous appelons *connexion affine* sur M une application $D : \mathfrak{X} \to F(\mathfrak{X})$ telle que les applications innées ∇ et K satisfont aux conditions :

1. $\nabla : \mathcal{D}^1 \to F(\mathcal{D}^1)$ est une connexion linéaire;
2. $K : \mathcal{D}^1 \to \mathcal{D}^1$ est un champ de tenseurs du type (1, 1).

CONSÉQUENCE 4.1. — Pour $\forall P \in \mathfrak{X}$, D_P est une application R-affine.

CONSÉQUENCE 4.2. — D est une application $\mathcal{F}$-affine de $\mathfrak{X}$ en $F(\mathfrak{X})$.

CONSÉQUENCE 4.3. — Une connexion affine sur M est uniquement déterminée par une connexion linéaire ∇ et un champ de tenseurs $K \in \mathcal{D}^1_1$ sur M [(2), (3)].

Des théorèmes 2.1-3, 3.1 et la définition 4.1 on obtient :

THÉORÈME 4.1. — *L'ensemble* $\mathfrak{A}(M)$ *des connexions affines sur* M *est un module affine associé au module vectoriel* $\mathcal{D}^1_2 \times \mathcal{D}^1_1$ *sur* M.

THÉORÈME 4.2. — *Toute métrique riemannienne sur une variété compacte et orientable* M *détermine une structure euclidienne sur l'espace affine* $\mathfrak{A}(M)$.

THÉORÈME 4.3. — *Tout difféomorphisme de la variété* M *sur la variété* M' *détermine un isomorphisme de* $\mathfrak{A}(M)$ *sur* $\mathfrak{A}(M')$.

REMARQUE 4.1. — Pour la définition d'une connexion affine sur M nous pouvons utiliser au lieu du champ des points $p \in M$ un champ quelconque $O \in \mathfrak{X}$. Dans ce cas, la connexion linéaire ∇ est donnée par

$$(4) \qquad \nabla_X Y = \overrightarrow{D_O(Q_1)\,D_{P_1}(Q_1)} - \overrightarrow{D_O(O)\,D_{P_1}(O)}$$

où $X = \overrightarrow{OP_1}$ et $Y = \overrightarrow{OQ_1}$. Au lieu du champ des tenseurs K nous devons considérer le champ $K' \in \mathcal{D}^1_1$ donné par

$$(5) \qquad K'(X) = \overrightarrow{D_O(O)\,D_{P_1}(O)} \qquad \text{ou} \qquad K'(X) = \nabla_X(\overrightarrow{pO}) + K(X).$$

Définition 4.2. — Un champ de points $O \in \mathfrak{X}$ s'appelle *invariant* pour la connexion affine D sur M si pour tout $P \in \mathfrak{X}$, on a $D_P(O) = O$.

Théorème 4.4. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que le champ* $O \in \mathfrak{X}$ *soit invariant pour la connexion affine* D *sur* M *est*

$$\forall X \in \mathcal{D}^1 : \quad \nabla_X \xi = K(X) \qquad \text{où} \quad \xi = \overrightarrow{Op}. \tag{6}$$

Définition 4.3. — Nous appelons *connexion centro-affine* [4] sur la variété M, douée avec une structure centro-affine définie par un champ $O \in \mathfrak{X}$, une connexion affine D qui laisse invariant le champ O.

Conséquence 4.4. — Une connexion centro-affine sur la variété M à structure centro-affine est déterminée par une connexion linéaire ∇ [4].

Remarque. — Les définitions données pour les connexions affines et centro-affines sont équivalentes avec celles données dans [2] et respectivement [4] à l'aide des espaces fibrés.

(*) Séance du 19 février 1968.

(1) K. Nomizu, *Amer. Math. J.*, 76, 1954, p. 33-65.
(2) A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Roma, 1955, p. 146.
(3) I. Cattaneo-Gasparini, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 10, 1956, p. 119.
(4) V. Cruceanu, *Comptes rendus*, 260, 1965, p. 6272.

(*Séminaire Mathématique de l'Université « Al. I. Cuza », Jassy, République Socialiste de Roumanie.*)