BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie
Tome 13 (61), nr. 1, 1969

SUR L'ENSEMBLE DES CONNEXIONS SUR UN ESPACE FIBRÉ

PAR

V. CRUCEANU (IAŞI)

Dans [7, p. 70], K. NOMIZU a montré que l'ensemble des connexions sur un espace fibré principal $P(M, \pi, G)$ est convexe dans le sens suivant. Si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ sont des formes de connexion sur P, alors leur combinaison convexe

$$\omega = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \omega_k \text{ où } \alpha^k \in R, \quad \alpha^k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{r} \alpha^k = 1$$

est aussi une forme de connexion. Plus tard, R. BISHOP et R. CRITTENDEN, [1, p. 101], ont remarqué que si f^* est une fonction de classe C^∞ sur M et ω_1, ω_2 deux formes de connexion sur P, alors $(f^* \circ \pi)\, \omega_1 + (1 - f^* \circ \pi)\, \omega_2$ est aussi une forme de connexion. Ils en ont déduit que l'ensemble des connexions sur P est un espace affine sur R. En [2] nous avons introduit la notion de module affine et nous avons montré que l'ensemble des connexions linéaires de même que celui des connexions affines sur une variété différentiable forment des modules affines. L'extension de ce résultat à l'ensemble des connexions sur un espace fibré principal quelconque est le but de la Note présente.

1. Soit $P(M, \pi, G)$ un espace fibré principal et $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{F}(P)$ les anneaux des fonctions de classe C^∞ respectivement sur M et P. Soit encore $\mathcal{D}^r_s(P)$ le $\mathcal{F}(P)$ -module des champs de tenseurs du type (r, s) et classe C^∞ sur P. Nous avons le

L e m m e 1. 1. *L'ensemble* $\mathcal{F}_0(P) = \{f^* \circ \pi : \ P \to R \mid f^* \in \mathcal{F}(M)\}$ *est un sous-anneau de* $\mathcal{F}(P)$ *isomorphe à* $\mathcal{F}(M)$.

En effet, l'application $\pi : P \to M$, étant différentiable de classe C^∞, détermine une application $\pi^* : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(P)$ définie par

$$(1) \qquad \forall f^* \in \mathcal{F}(M), \quad \pi^*(f^*) = f^* \circ \pi,$$

qui est un homomorphisme d'anneaux. Du fait que π est une surjection il résulte que π^* est un monomorphisme Enfin, en remarquant que $\mathcal{F}_0(P) = \operatorname{im} \pi^*$, on déduit que $\mathcal{F}_0(P)$ est un sous—anneau de $\mathcal{F}(P)$ isomorphe à $\mathcal{F}(M)$.

On a encore le

L e m m e 1. 2. *L'ensemble* $\mathcal{T}(P)$ *des* 1-*formes de classe* C^∞ *sur* P *à valeurs dans l'algèbre* LIE g *de* G, *qui sont tensorielles et du type* ad G, *peut être doué avec une structure de module linéaire sur l'anneau* $\mathcal{F}_0(P)$.

Démonstration. Un élément de $\mathcal{T}(P)$ est une application $\mathcal{F}(P)$-linéaire $\tau: \mathcal{D}^1(P) \to g$ qui satisfait encore aux conditions

a) $\tau(X) = 0$, pour X vecteur vertical,

b) $R_a^* \tau = \mathrm{ad}\ a^{-1} \circ \tau, \quad \forall a \in G$.

Si $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}(P)$, il est évident que $\tau_1 + \tau_2 \in \mathcal{T}(P)$. Pour $f \in \mathcal{F}_0(P)$ et $\tau \in \mathcal{T}(P)$ on a
$R_a^*(f\tau)_u\ (X) = (f\tau)_{ua}\ (\mathrm{d}R_a X) = f(ua)\, \tau_{ua}\ (\mathrm{d}R_a X) = f(u)\, \mathrm{ad}\, a^{-1}\, \tau_u\ (X) = ad\, a^{-1} (f\tau)_u (X)$,
c'est-à-dire $f\tau \in \mathcal{T}(P)$ et par suite $\mathcal{T}(P)$ est un module sur $\mathcal{F}_0(P)$.

Nous rappelons [2] la

D é f i n i t i o n 1. 1. *On dit que l'ensemble* A *est un module affine associé au module linéaire* L *sur l'anneau* K *s'il existe une application* $p: A \times \times A \to L$ *satisfaisant aux conditions*

1. $\forall\ \lambda, \mu, \nu \in A: p(\lambda, \mu) + p(\mu, \nu) = p(\lambda, \nu)$;

2. $\exists\ \lambda_0 \in A$, *tel que l'application* $\varphi: A \to L$ *définie par* $\varphi(\lambda) = p(\lambda_0, \lambda)$ *pour tout* $\lambda \in A$ *soit une bijection.*

Notons le module affine considéré par $A\,(L, p, K)$.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le

T h é o r è m e 1.1. *L'ensemble* $\mathcal{Q}(P)$ *des* 1-*formes de connexion sur l'espace fibré principal* $P(M, \pi, G)$ *peut être doué avec une structure de module affine associé au module linéaire* $\mathcal{T}(P)$ *sur l'anneau* $\mathcal{F}_0(P)$.

D é m o n s t r a t i o n. Pour tout couple ordonné des 1-formes de connexion ω_1, ω_2 sur P, l'1-forme $\tau = \omega_2 - \omega_1$, comme il est bien connu [5, p. 59], appartient à $\mathcal{T}(P)$. En mettant alors

$$p(\omega_1, \omega_2) = \omega_2 - \omega_1$$

on obtient une application $p: \mathcal{Q}(P) \times \mathcal{Q}(P) \to \mathcal{T}(P)$ qui satisfait aux conditions 1, 2 de la définition 1.1 et par suite détermine sur $\mathcal{Q}(P)$ une structure de module affine associé à $\mathcal{T}(P)$ sur $\mathcal{F}_0(P)$.

2. Considérons une connexion Γ sur $P(M, \pi, G)$ et soit V la distribution verticale de la fibration et H la distribution horizontale de la connexion Γ. Tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{D}^1(P)$ peut être décomposé uniquement sous la forme

$$X = vX + hX, \tag{2}$$

où $vX \in V$ et $hX \in H$. Il en résulte que la connexion Γ détermine deux champs de tenseurs $v, h \in \mathcal{D}_1^1(P)$ définis par

$$v(X) = vX,\ \ h(X) = hX = hX, \quad \forall X \in \mathcal{D}^1(P). \tag{3}$$

Ces champs de tenseurs seront appelés respectivement le *projecteur vertical* et le *projecteur horizontal* associés à la connexion Γ. Nous avons le

Théorème 2.1. *Un champ de tenseurs $v \in \mathcal{D}_1^1(P)$ est le projecteur vertical associé à une connexion Γ sur l'espace fibré principal $P(M, \pi, G)$ si et seulement s'il satisfait aux conditions*

$$(4) \qquad v^2 = v, \quad \operatorname{im} v_u = V_u \ \forall u \in P, \quad \mathrm{d}R_a \circ v = v \circ \mathrm{d}R_a \quad \forall a \in G.$$

Dans ce cas la distribution horizontale de la connexion Γ est donnée par

$$(5) \qquad H_u = \ker v_u, \quad u \in P.$$

Démonstration. Nécessité. De (2) et (3) on obtient aisément (4_1), (4_2) et (5). De (2)

$$\mathrm{d}R_a(X) = \mathrm{d}R_a(vX) + \mathrm{d}R_a(hX)$$

et compte tenu du fait que V et H sont invariantes par les translations à droite on obtient

$$dR_a(vX) = v(\mathrm{d}R_a X), \quad \mathrm{d}R_a(hX) = h(\mathrm{d}R_a X).$$

Par suite (4_3) est aussi vérifiée.

Suffisance. Du fait que $v \in \mathcal{D}_1(P)$ et des conditions (4) il résulte que la distribution H donnée par (5) est de classe C^∞, supplémentaire à V et invariante par les translations à droite. Par suite H est la distribution horizontale d'une connexion Γ sur P.

Compte tenu que v et h sont liés par les relations

$$(6) \qquad v + h = I, \qquad v \circ h = h \circ v = 0,$$

où I est le champ de tenseurs de Kronecker, on obtient du théorème 2.1 le

Théorème 2.2. *Un champ de tenseurs $h \in \mathcal{D}_1^1(P)$ est le projecteur horizontal associé à une connexion Γ sur l'espace fibré principal $P(M, \pi, G)$ si et seulement s'il satisfait aux conditions*

$$7) \qquad h^2 = h, \quad \ker h_u = V_u \ \forall u \in P, \quad \mathrm{d}R_a \circ h = h \circ \mathrm{d}R_a \ \forall a \in G.$$

Dans ce cas la distribution horizontale de la connexion est donnée par

$$(8) \qquad H_u = \operatorname{im} h_u, \quad u \in P.$$

Les sous-ensembles de $\mathcal{D}_1^1(P)$ formés par les projecteurs verticaux et horizontaux associés à toutes les connexions sur P seront notés respectivement par $\mathcal{V}(P)$ et $\mathcal{H}(P)$. Avant de déterminer la structure de $\mathcal{V}(P)$ et $\mathcal{H}(P)$ nous établissons quelques résultats.

Lemme 2.1. *La partie $\mathcal{E}(P)$ de $\mathcal{D}_1^1(P)$ formée par les champs w qui satisfont aux conditions*

$$(9) \qquad \operatorname{im} w_u \subset V \subset \ker w_u \quad \forall u \in P, \quad \mathrm{d}R_a \circ w = w \circ \mathrm{d}R_a \quad \forall a \in G$$

est un sous-module linéaire de $\mathcal{D}_1^1(P)$ sur l'anneau $\mathcal{F}_0(P)$.

Démonstration. Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_0(P)$, $w_1, w_2 \in \mathcal{E}(P)$ et $w = f_1 w_1 + f_2 w_2$. Du fait que w_1 et w_2 satisfont à (9_1) il résulte alors qu'elles sont satisfaites aussi par w. Nous avons encore

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_a \circ w_u(X) &= \mathrm{d}R_a \circ (f_1 w_1 + f_2 w_2)_u (X) = f_1(u)\, \mathrm{d}R_a \circ w_{1u}(X) + \\ &+ f_2(u)\, \mathrm{d}R_a \circ w_{2u}(X) = f_1(ua)\, w_{1ua}(\mathrm{d}R_a X) + \\ &+ f_2(ua)\, w_{2ua}(\mathrm{d}R_a X) = (f_1 w_1 + f_2 w_2)_{ua}(\mathrm{d}R_a(X)) = \\ &= w_{ua} \circ \mathrm{d}R_a(X). \end{aligned}$$

Par suite w satisfait aux conditions (9), c'es-à-dire $\mathcal{E}(P)$ est un sous-module de $\mathcal{D}_1^1(P)$ sur $\mathcal{F}_0(P)$.

Lemme 2. 2. *Si $v_1 \in \mathcal{V}(P)$, alors pour que $v_2 \in \mathcal{V}(P)$ il faut et il suffit que $v_2 - v_1 \in \mathcal{E}(P)$.*

En effet, si $v_1, v_2 \in \mathcal{V}(P)$ et $w = v_2 - v_1$, de (4) il résulte que w satisfait aux conditions (9) et par suite $w \in \mathcal{E}(P)$.

Réciproquement, soit $v_1 \in \mathcal{V}(P)$, $w \in \mathcal{E}(P)$ et $v_2 = v_1 + w$. De (4) et (9) il résulte que v_2 satisfait aux conditions (4), c'est-à-dire $v_2 \in \mathcal{V}(P)$.

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 2.3. *L'ensemble $\mathcal{V}(P)$ des projecteurs verticaux associés aux connexions sur $P(M, \pi, G)$ peut etre doué avec une structure de module affine associé au module linéaire $\mathcal{E}(P)$ sur l'anneau $\mathcal{F}_0(P)$.*

Démonstration. En mettant

$$p(v_1, v_2) = v_2 - v_1, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}(P) \tag{10}$$

on obtient d'après le lemme 2.2 une application $p: \mathcal{V}(P) \times \mathcal{V}(P) \to \mathcal{E}(P)$ qui satisfait aux conditions 1, 2 de la définition 1.1.

Des relations (6), du lemme 2.2 et du théorème 2.3 il résulte le

Théorème 2.4. *L'ensemble $\mathcal{H}(P)$ des projecteurs horizontaux associés aux connexions sur $P(M, \pi, G)$ peut etre doué avec une structure de module affine associé au module linéaire $\mathcal{E}(P)$ sur l'anneau $\mathcal{F}_0(P)$.*

3. Soit Γ une connexion sur P et v, h les projecteurs vertical et horizontal correspondants. En mettant

$$F = v - h, \tag{11}$$

on obtient un champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}_1^1(P)$ qui détermine une structure presque-produit sur P, nommée la *structure presque-produit associée* à la connexion Γ. De (11) et (6) on obtient les relations

$$v = \frac{1}{2}(I + F), \quad h = \frac{1}{2}(I - F) \tag{12}$$

qui expriment les projecteurs de Γ à l'aide de champ F, de la structure presque-produit associée. Nous avons [3] le

T h é o r è m e 3.1. *Un champ de tenseurs* $F \in \mathcal{D}_1^1(P)$ *est le champ d'une structure presque-produit associée à une connexion* Γ *sur* $P(M, \pi, G)$ *si et seulement s'il satisfait aux conditions*

$$(13) \quad F^2 = I,\ F_u(X) = X,\ \forall\, X \in V_u,\ \forall u \in P,\ \mathrm{d}R_a \circ F = F \circ \mathrm{d}R_a\ \ \forall a \in G.$$

Dans ce cas la distribution horizontale H *de la connexion* Γ *est donnée par*

$$(14) \qquad H_u = \{X \in T_u(P) \,|\, F_u(X) = -X\}, \quad \forall u \in P.$$

D é m o n s t r a t i o n . En effet, si F détermine une structure presque-produit associée à une connexion Γ sur P, alors de (11), (4) et (6) on obtient (13) et (14). Réciproquement, étant donné F qui satisfait(13) on constate que v donné par (12_1) satisfait à (4) et par suite il est le projecteur vertical d'une connexion Γ sur P, pour laquelle F est le champ de la structure presque-produit associée.

Des théorèmes 2.3, 2.4 et de la relation (11) on obtient aisément le

T h é o r è m e 3.2. *L'ensemble* $\mathcal{P}(P)$ *des champs de tenseurs* $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_1^1(P)$ *qui déterminent des structures presque-produit associées aux connexions sur* P *peut etre doué avec une structure de module affine associé au module linéaire* $\mathcal{E}(P)$ *sur l'anneau* $\mathcal{F}_0(P)$.

4. A une connexion Γ sur l'espace fibré principal $P(M, \pi, G)$ nous avons associé quatre objets géométriques ω, v, h, F qui satisfont à certaines conditions. Chacun de ces objets caractérise la connexion et l'ensemble des objets de chaque catégorie peut être doué avec une structure de module affine sur $\mathcal{F}_0(P)$. Nous allons montrer que ces quatre modules sont isomorphes dans le sens qui sera précisé. Établissons d'abord le

T h é o r è m e 4.1. *Soient* Γ_i $(i = 1, 2)$ *deux connexions sur* P *et* $(\omega_i, v_i, h_i, F_i)$ *les objets géométriques associes correspondants. Alors pour* $f_1, f_2 \in$ $\in \mathcal{F}_0(P)$ *tel que* $f_1 + f_2 = 1$, *la forme*

$$(15) \qquad \omega = f_1\, \omega_1 + f_2\, \omega_2$$

est la forme d'une connexion Γ *sur* P *pour laquelle les objets associés* v, h, F *sont donnés par*

$$(16) \qquad v = f_1 v_1 + f_2 v_2, \quad h = f_1 h_1 + f_2 h_2, \quad F = f_1 F_1 + f_2 F_2 .$$

D é m o n s t r a t i o n . $\mathcal{Q}(P)$, $\mathcal{V}(P)$, $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{P}(P)$ étant des modules afffines sur P, il en résulte que ω, v, h, F sont des objets associés à des connexions sur P. Nous devons montrer qu'ils sont associés à la même connexion Γ. En vertu de (6) et (11) il suffit de montrer que la distribution horizontale H de Γ coïncide avec ker v. Soit $X \in \ker v$. Alors

$$\omega(X) = f_1 \omega_1(X) + f_2 \omega_2(X) = f_1 \omega_1(v_1 X) + f_2 \omega_2(v_2 X) =$$
$$= f_1 \omega_1(v_1 X) + f_2 \omega_1(v_2 X) = \omega_1(f_1 v_1 X + f_2 v_2 X) = \omega_1(vX) = 0.$$

Donc $X \in H$ et par suite $\ker v \subset H$. Comme $\ker v$ et H ont la même dimension, il en résulte $H = \ker v$.

D é f i n i t i o n 4.1. *Nous disons que deux modules affines* $A(L, p, K)$, $A'(L', p', K)$ *sont isomorphes s'il existe une application* $\Psi_A : A \to A'$ *et un point* $\lambda_0 \in A$ *tel que l'application*

$$\Psi_A = \varphi' \circ \Psi_L \circ \varphi^{-1} : \quad L \to L' \tag{17}$$

soit un isomorphisme de modules linéaires.

On peut démontrer [4] le

T h é o r è m e 4.2. *Si l'anneau* K *est unitaire et l'élément* 2.1_K *est inversable, alors l'application* $\Psi_A : A \to A'$ *est un isomorphisme si et seulement si pour* $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ *tel que* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ *et* $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ *on a*

$$\Psi_A(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2) = \alpha_2\Psi_A(\lambda_1) + \alpha_2\Psi_A(\lambda_2). \tag{18}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le

T h é o r è m e 4.3. *Pour tout espace fibré principal* $P(M, \pi, G)$ *il existe un isomorphisme naturel entre les modules* $\mathcal{G}(P), \mathcal{V}(P), \mathcal{H}(P)$ *et* $\mathcal{P}(P)$.

En effet, en vertu des théorèmes 4.1 et 4.2 on obtient un tel isomorphisme en considérant comme correspondants les éléments de ces modules associés à la même connexion sur P.

L'un quelconque des modules précédents sera appelé le *module affine des connexions sur* P et noté par $\mathcal{A}(P)$.

5. Soient deux espaces fibrés principaux $P(M, \pi, G)$ et $P'(M', \pi', G')$.

D é f n i t i o n 5.1. *On appelle homomorphisme de l'espace* P *en* P' *un couple d'applications* $\Phi_P : P \to P'$, $\Phi_G : G \to G'$ *qui satisfont aux conditions*

a) Φ_G *est un homomorphisme de groupes :*

b) $\Phi_P \circ R_a = R_{\Phi_G(a)} \circ \Phi_P, \quad \forall a \in G.$

Il en résulte que Φ_P conserve les fibres et par suite détermine une application $\Phi_M : M \to M'$. Nous disons que le couple (Φ_P, Φ_G) est un *d-homomorphisme* si l'application $\Phi_M : M \to M'$ est un difféomorphisme.

D é f i n i t i o n 5.2. *Soient* L *et* L' *deux modules linéaires respectivement sur les anneaux* K *et* K'. *On appelle homomorphisme (dimorphisme) de* L *et* L' *un couple d'applications* $\Psi_L : L \to L'$, $\Psi_K : K \to K'$ *tel que*

a) Ψ_K *est un homomorphisme d'anneaux,*

b) $\Psi_L(X + Y) = \Psi_L(X) + \Psi_L(Y), \quad \Psi_L(\alpha X) = \Psi_K(\alpha). \Psi_L(X),$

$$\forall X, Y \in L, \quad \forall \alpha \in K.$$

D é f i n i t i o n 5.3. *On appelle homomorphisme du module affine* $A(L, p, K)$ *en* $A'(L', p', K')$ *un couple d'applications* $\Psi_A : A \to A'$, $\Psi_K : K \to K'$ *avec la propriété qu'il existe un point* $\lambda_0 \in A$ *tel que le couple d'applications* $\Psi_L = \varphi' \circ \Psi_A \circ \varphi^{-1} : L \to L'$ $\Psi_K : K \to K'$ *est un homomorphisme du module linéaire* L *en* L'.

On peut démontrer [4] le

T h é o r è m e 5.1. *Si l'anneau* K *est unitaire et* 2.1. *est inversable, alors le couple* $\Psi_A : A \to A'$, $\Psi_K : K \to K'$ *est un homomorphisme du module* *affine* $A(L, p, K)$ *en* A' (L', p', K') *si et seulement si pour* $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ *on a*

$$\Psi_A(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2) = \Psi_K(\alpha_1)\Psi_A(\lambda_1) + \Psi_K(\alpha_2)\Psi_A(\lambda_2). \tag{19}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 5.2. *Soit* (Φ_P, Φ_G) *un d-homomorphisme de l'espace fibré principal* $P(M, \pi, G)$ *en* $P'(M', \pi', G')$ *et* $\Gamma(\omega, v, h, F)$ *une connexion sur* P. *Alors*

a) *Il existe une connexion uniquement déterminée* $\Gamma'(\omega, v', h', F')$ *sur* P' *tel que la distribution horizontale* H *de* Γ *soit appliqueé dans la distribution horizontale* H' *de* Γ';

b) $\Phi_P^* \omega' = \Phi_g \circ \omega$, où $\Phi_g : g \to g'$ *est l'application innée par* $\Phi_G : G \to G'$;

c) $d\Phi_P \circ v = v' \circ d\Phi_P$, $d\Phi_P \circ h = h' \circ d\Phi_P$, $d\Phi_P \circ F = F' \circ d\Phi_P$.

d) *L'application* $\Psi_A : \mathcal{A}(P) \to \mathcal{A}(P')$ *définie par* $\Psi_A(\Gamma) = \Gamma'$ *est un homomorphisme du module affine* $\mathcal{A}(P)$ *des connexions sur* P *dans le module affine* $\mathcal{A}(P')$ *des connexions sur* P'.

Démonstration. Les conditions a)et b) sont démontrées en [6, p. 80]. Pour tout $u' \in P'$ il existe $u \in P$ *et* $a' \in G'$ tel que

$$u' = \Phi_P(u) \cdot a'. \tag{20}$$

En mettant alors

$$H'_{u'} = dR_{a'} \circ d\Phi_P(H_u), \tag{21}$$

on obtient la distribution horizontale H' d'une connexion Γ' sur P'. Les formes ω et ω' des connexions Γ et Γ' sont liées alors par la relation b). Démontrons les conditions c) et d). Soit u' donné par (20) et $X \in T_u(P)$. Alors

$$d\Phi_P(X) = d\Phi_P(v_u X) + d\Phi_P(h_u X) = v'_{u'}(d\Phi_P(X)) + h'_{u'}(d\Phi_P(X)).$$

Comme Φ_P conserve les fibres et par suite $d\Phi_P(V) \subset V'$, il en résulte la condition c) pour v et h. De (11) il résulte alors que la condition c) est aussi vérifiée par F.

En mettant pour chaque $f \in \mathcal{F}_0(P)$ et $u' \in P'$ donné par (20)

$$f'(u') = f(u),$$

on obtient une fonction $f' \in \mathcal{F}_0(P')$ et par suite une application $\Psi_{\mathcal{F}_0}$: $\mathcal{F}_0(P) \to \mathcal{F}_0(P')$. Il est aisé de voir que

$$\Psi_{\mathcal{F}_0} = (\pi')^* \circ (\Phi_M^*)^{-1} \circ (\pi^*)^{-1} : \quad \mathcal{F}_0(P) \to \mathcal{F}_0(P').$$

Par suite, compte tenu du lemme 1.1. et du fait que Φ_M est un difféomorphisme, il en résulte que $\Psi_{\mathcal{F}_0}$ est un isomorphisme.

Nous allons montrer que pour $f_1,\ f_2 \in \mathcal{F}_0(P)$, $f_1+f_2=1$ et $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathcal{Q}(P)$ on a

$$(f_1\omega_1+f_2\omega_2)'=f_1'\omega_1'+f_2'\omega_2'. \tag{22}$$

En effet, soit $\omega=f_1\omega_1+f_2\omega_2$, $\omega'=(f_1\omega_1+f_2\omega_2)'$, $\widetilde{\omega}=f_1'\omega_1'+f_2'\omega_2'$ et $H,\ H',\ \widetilde{H}$ les distributions horizontales correspondantes. En considérant $u'\in P'$ donné par (20) et $X'_{u'}\in H'_{u'}$, nous avons $X'_{u'}=\mathrm{d}R_{a'}\circ \mathrm{d}\Phi_P(X_u)$, où $X_u\in H_u$. Par suite $\widetilde{\omega}(X'_{u'})=\widetilde{\omega}(\mathrm{d}R_{a'}\circ\mathrm{d}\Phi_P(X_u))=\mathrm{ad}\,a'^{-1}(f_1'\omega_1'+f_2'\omega_2')$ $\mathrm{d}\Phi_P(X_u)=\mathrm{ad}\,a'^{-1}\Phi_g(f_1(u)\,\omega_1(X_u)+f_2(u)\,\omega_2(X_u))=\mathrm{ad}\,a'^{-1}\Phi_g\circ\omega(X_u)=0.$ c'est-à-dire $X'_{u'}\in\widetilde{H}'_{u'}$ et donc $H'_{u'}\subset\widetilde{H}_{u'}$. Comme ces deux espaces ont la la même dimension il en résulte $H'_{u'}=\widetilde{H}_u$ et par suite $H'=\widetilde{H}$. On en obtient que $\widetilde{\omega}'=\omega$, c'est-à-dire la relation (22) (et la condition d) du théorème est démonstrée.

On constate aisément qu'on obtient une catégorie $\mathcal{C}_1$ en considérant comme objets les espaces fibrés principaux sur des bases avec la même dïmension n et comme morphismes les d-homomorphismes. Nous obtenons aussi une catégorie $\mathcal{C}_2$ en considérant la classe des modules affines avec leurs homomorphismes.

Du théorème 5.1 on obtient le

Théorème 5.2. *La fonction qui associe à tout espace fibré principal $P(M,\pi,G)\in\mathcal{C}_1$ le module affine $\mathcal{A}(P)$ de ses connexions et à chaque d-homomorphisme $(\Phi_P,\ \Phi_G)$ de $P(M,\ \pi,\ G)$ en $P'(M',\ \pi',\ G')$ le homomorphisme $(\Psi_{\mathcal{A}},\Psi_{\mathcal{F}_0})$ du module affine $\mathcal{A}(P)$ en $\mathcal{A}(P')$ est un foncteur covariant de catégorie $\mathcal{C}_1$* à $\mathcal{C}_2$.

Reçu la 25 III 1969

BIBLIOGRAPHIE

1] БИШОП Р., КРИТТЕНДЕН Р. — *Геометрия многообразий* (перевод с английского), Москва, 1967.

[2] CRUCEANU V. — *Sur la définition d'une connexion affine.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 266 p. 532—534.

[3] CRUCEANU V. — *Sur la structure presque-produit associée à une connexion sur un espace fibré.* An. şt. Univ. Iaşi, sect. I a, t. XV (1969), p.

[4] CRUCEANU V. — *Asupra modulelor afine.* Studii şi cercetări matematice. Acad. R.S. România, t. 21 (1969), p. 1271—1278

[5] ЛИХНЕРОВИЧ А. — *Теория связностей в целом и группы голономии* (перевод с французского). Москва, 1960.

[6] KOBAYASHI S., NOMIZU K. — *Foundations of differential geometry.* Vol. I. New York, 1963.

[7] НОМИДЗУ К. — *Группы Ли и дифференциальная геометри.* (перевод с английского). Москра, 1960.