GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur la théorie des sous-fibrés vectoriels.* Note de **Vasile Cruceanu,** présentée par André Lichnerowicz.

On établit les équations fondamentales et leurs conditions d'intégrabilité pour deux sous-fibrés vectoriels supplémentaires d'un fibré vectoriel.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — On the theory of vector subbundles.

The fundamental equations and their integrability conditions for two splitting vector subbundles of a vector bundle are established.

1. Soient M une variété paracompacte de classe C^∞, E un fibré vectoriel au-dessus de M et E′, E″ deux sous-fibrés supplémentaires de E. On désigne par $\mathscr{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles sur M et par $D^1(M)$ et $D^1(M, E)$ les $\mathscr{F}(M)$-modules des sections sur TM et E. Soient ensuite P′ et P″ les projecteurs de E sur E′ et E″ et $F=P'-P''$ la structure presque produit (p. p.) associée. On a:

PROPOSITION 1.1. — *Si* D *est une connexion linéaire sur* E, *alors en posant*

$$\left\{\begin{array}{ll} D'_X u'=P'(D_X u'), & D''_X u''=P''(D_X u''),\\ B'_X u'=P''(D_X u'), & B''_X u''=P'(D_X u''),\end{array}\right. \tag{1.1}$$

pour $X\in D^1(M)$, $u'\in D^1(M, E')$ *et* $u''\in D^1(M, E'')$, *on obtient deux connexions* D′ *et* D″ *sur* E′ *et* E″ *et deux champs de tenseurs mixtes* B′ *et* B″ *de type* (1.2), *de façon que*

$$D_X u'=D'_X u'+B'_X u',\qquad D_X u''=B''_X u''+D''_X u''. \tag{1.2}$$

D′ et D″ seront appelées les connexions induites par D sur E′ et E″ et B′ et B″ les tenseurs d'Euler associés aux sous-fibrés E′ et E″, relatifs à la connexion D sur E. Nous dirons que (1.2) sont les équations fondamentales de Gauss et Weingarten pour les sous-fibrés E′ et E″.

Si R, R′ et R″ sont les tenseurs de courbure de D, D′ et D″ et ∇ une connexion linéaire, de torsion T, sur M, on tire de (1.2) les conditions d'intégrabilité

$$\left\{\begin{array}{l} R_{XY}u'=R'_{XY}u'+B''_X\circ B'_Y(u')-B''_Y\circ B'_X(u')+\nabla'_X B'(Y,u')\\ \qquad\qquad -\nabla'_Y B'(X,u')+B'(T(X,Y),u'),\\ R_{XY}u''=R''_{XY}u''+B'_X\circ B''_Y(u'')-B'_Y\circ B''_X(u'')+\nabla''_X B''(Y,u'')\\ \qquad\qquad -\nabla''_Y B''(X,u'')+B''(T(X,Y),u''),\end{array}\right. \tag{1.3}$$

où

$$\begin{array}{l}\nabla'_X B'(Y,u')=D''_X(B'(Y,u'))-B'(\nabla_X Y,u')-B'(Y,D'_X u'),\\ \nabla''_X B''(Y,u'')=D'_X(B''(Y,u''))-B''(\nabla_X Y,u'')-B''(Y,D''_X u''),\end{array} \tag{1.4}$$

sont les dérivées covariantes mixtes des tenseurs B′ et B″.

En projetant (1.3) sur E′ et E″ on obtient les relations

$$\left\{\begin{array}{l} P'R_{XY}u'=R'_{XY}u'+B''_X\circ B'_Y(u')-B''_Y\circ B'_X(u'),\\ P''R_{XY}u''=R''_{XY}u''+B'_X\circ B''_Y(u'')-B'_Y\circ B''_X(u''),\end{array}\right. \tag{1.5}$$

que nous appelons les équations vectorielles de Gauss et

$$\left\{\begin{array}{l} P''R_{XY}u'=\nabla'_X B'(Y,u')-\nabla'_Y B'(X,u')+B'(T(X,Y),u'),\\ P'R_{XY}u''=\nabla''_X B''(Y,u'')-\nabla''_Y B''(X,u'')+B''(T(X,Y),u''),\end{array}\right. \tag{1.6}$$

qui seront nommées les équations vectorielles de Codazzi.

0249-6291/86/03020705 $ 2.00

A l'aide des projecteurs P′ et P″ on obtient pour B′ et B″,

(1.7) $$B'_X u' = D_X P'(u'), \qquad B''_X u'' = D_X P''(u'').$$

Ces relations nous suggèrent l'idée de considérer les connexions

(1.8) $$D^1_X = D_X - D_X P', \qquad D^2_X = D_X - D_X P'',$$

qui possèdent les propriétés:

(1.9) $$D'_X = D^1_{X/E'}, \qquad D''_X = D^2_{X/E''}, \qquad D_X = 1/2(D^1_X + D^2_X), \qquad D_X F = D^2_X - D^1_X.$$

Donc, D′ et D″ sont les restrictions des connexions D^1 et D^2 à E′ et E″, D est leur connexion moyenne et DF leur tenseur de déformation. En posant

(1.10) $$\bar{D}_X = 1/2(D_X + D^c_X),$$

où $D^c_X = F \circ D_X \circ F$ est la connexion conjuguée [1] à D relativement à F, on obtient

(1.11) $$\bar{D}_X F = 0,$$

c'est-à-dire $\bar{D}$ est compatible avec la structure p. p. F. On a pour $\bar{D}$,

(1.12) $$\bar{D}_X = P' \circ D_X \circ P' + P'' \circ D_X \circ P'',$$

d'où il résulte

(1.13) $$D'_X = \bar{D}_{X/E'}, \qquad D''_X = \bar{D}_{X/E''}.$$

Remarque 1.1. — Les connexions D′ et D″ ainsi que les tenseurs B′ et B″ se présentent en (1.1) comme projections de certains objets géométriques de E sur E′ et E″ et dans (1.9) [ou (1.13) et (1.7)] comme restrictions de tels objets à E′ et E″.

Définition 1.1. — Nous dirons que le sous-fibré E′ (resp. E″) est autoparallèle relatif à la connexion D sur E si pour tout $u' \in D^1(M, E')$ [resp. $u'' \in D^1(M, E'')$] on a $D_X u' \in D^1(M, E')$ [resp. $D_X u'' \in D^1(M, E'')$].

De (1.2) il résulte:

Proposition 1.2. — *Le sous-fibré* E′ (resp. E″) *est autoparallèle relativement à la connexion* D *sur* E *si et seulement si* B′ = 0 (resp. B″ = 0). *Les deux sous-fibrés sont simultanément parallèles si et seulement si la connexion* D *est compatible avec la structure p. p.* F.

2. Soit maintenant h une métrique non dégénérée sur E, compatible avec la connexion D et la structure p. p. F, c'est-à-dire

(2.1) $$D_X h = 0, \qquad h(Fu, Fv) = h(u, v), \qquad \forall X \in D^1(M), u, v \in D^1(M, E).$$

Il en résulte que les sous-fibrés E′ et E″ sont orthogonaux et que les restrictions h' et h'' de h à E′ et E″ sont compatibles avec les connexions induites D′ et D″. On a aussi:

(2.2) $$h(B'_X u', u'') + h(u', B''_X u'') = 0.$$

En revenant aux relations (1.3), par multiplication scalaire avec $v' \in D^1(M, E')$ et $v'' \in D^1(M, E'')$, on obtient compte tenu de (2.2),

(2.3) $$\begin{cases} R_{XY u' v'} = R'_{XY u' v'} + h(B'_X u', B'_Y v') - h(B'_Y u', B'_X v'), \\ R_{XY u'' v''} = R''_{XY u'' v''} + h(B''_X u'', B''_Y v'') - h(B''_Y u'', B''_Y v''), \end{cases}$$

où nous avons noté

(2.4) $$\begin{cases} R_{XY uv} = h(R_{XY} u, v), \qquad R'_{XY u' v'} = h(R'_{XY} u', v'), \\ \qquad R''_{XY u'' v''} = h(R''_{XY} u'', v''), \end{cases}$$

Les équations (2.3) seront appelées les équations scalaires de Gauss pour E′ et E″.

On tire aussi de (1.3) les relations:

$$(2.5)\quad \begin{cases} R_{XY\,u'\,u''} = h(\nabla'_X B'(Y, u'), u'') - h(\nabla'_Y B'(X, u'), u'') + h(B'(T(X, Y), u'), u''), \\ R_{XY\,u''\,u'} = h(\nabla''_X B''(Y, u''), u') - h(\nabla''_Y B''(X, u''), u') + h(B''(T(X, Y), u''), u'). \end{cases}$$

qui seront nommées les équations scalaires de Codazzi pour E′ et E″. De (2.1) et (2.4) il résulte:

PROPOSITION 2.1. — *Les tenseurs* R, R′ *et* R″ *satisfont aux conditions*

$$(2.6)\qquad R_{XY\,uv} = -R_{XY\,vu}, \qquad R'_{XY\,u'\,v'} = -R'_{XY\,v'\,u'}, \qquad R''_{XY\,u''\,v''} = -R''_{XY\,v''\,u''}.$$

Compte tenu de (2.2), on a aussi:

PROPOSITION 2.2. — *Si la métrique h est compatible avec la connexion* D *et la structure p. p.* F *sur* E, *alors les sous-fibrés* E′ *et* E″ *sont simultanément autoparallèles, à savoir quand la connexion* D *est compatible avec la structure p. p.* F.

3. Soit enfin, J une structure presque complexe (p. c.) sur E, compatible avec la structure p. p. F, c'est-à-dire

$$(3.1)\qquad J \circ F = F \circ J.$$

Dans ce cas J conserve les sous-fibrés E′ et E″ et induit sur ces fibrés, par restriction, les structures p. c. J′ et J″. Il en résulte:

PROPOSITION 3.1. — *La connexion* D *est compatible avec la structure p. c.* J, *c'est-à-dire* $D_X J = 0$, *si et seulement si*

$$(3.2)\qquad D'_X J' = 0, \qquad D''_X J'' = 0, \qquad B'_X \circ J' = J'' \circ B'_X, \qquad B''_X \circ J'' = J' \circ B''_X.$$

On a aussi:

PROPOSITION 3.2. — *Si la structure p. c.* J *est compatible avec la connexion* D *et la structure p. p.* F *sur* E, *alors les tenseurs* R, R′ *et* R″ *satisfont aux conditions*:

$$(3.3)\qquad R_{XY} \circ J = J \circ R_{XY}, \qquad R'_{XY} \circ J' = J' \circ R'_{XY}, \qquad R''_{XY} \circ J'' = J'' \circ R''_{XY}.$$

Si on considère sur E la structure presque hermitienne (J, h) qui satisfait aux conditions (2.1 *b*) et (3.1), alors elle induit, par restriction, les structures presque hermitiennes (J', h') et (J'', h'') sur E′ et E″. Si la structure (J, h) est compatible avec la connexion D, alors les structures (J', h') et (J'', h'') seront compatibles avec les connexions D′ et D″.

Pour le couple presque hermitien (J, h), en notant

$$(3.4)\qquad \varphi(u, v) = h(u, J v),$$

on obtient une structure presque symplectique sur E, qui induit par restriction les structures de même type φ' et φ'' sur E′ et E″.

Remarque 3.1. — L'existence des connexions D sur E, compatibles avec les structures F, h, J, φ ou couples de celles-ci, est étudiée dans [1] où sont déterminées aussi les ensembles de ces connexions.

Remarque 3.2. — Si, en particulier, on prend dans nos considérations E = TM, on retrouve les formules fondamentales et leurs conditions d'intégrabilité, ainsi que d'autres résultats de la théorie des distributions (variétés non holonomes) supplémentaires ([2], [3], [5], [6], etc.). Si M′ est une sous-variété de M, E la restriction de TM à M′, E′ le sous-fibré tangent à M′ et E″ le sous-fibré normal, on obtient la théorie des sous-variétés ([4], etc.).

Remise le 13 janvier 1986, acceptée le 24 février 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] V. CRUCEANU, Connexions compatibles avec certaines structures sur un fibré vectoriel banachique, *Czechosl. Math. J.*, 24, 99, 1974, p. 126-142.

[2] F. FAVA, Distribuzioni e strutture indotte, *Atti Ac. Sc. Torino*, 103, 1969, p. 93-120.

[3] A. GRAY, Pseudo-Riemannien almost product manifolds and submersions, *J. Math. Mech.*, 16, 1967, p. 715-737.

[4] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, I, II, Interscience Publ., New York, 1963, 1969.

[5] Gh. VRĂNCEANU, Les espaces non holonomes, *Mém. Sc. Math.*, 76, Gauthier-Villars, Paris, 1936.

[6] K. YANO et Şt. PETRESCU, Sur les espaces métriques non holonomes complémentaires, *Disquisitiones Math. Phys. Bucarest*, 1, 1940, p. 191-246.

Séminaire mathématique « A. Myller »,
Université « Al. I. Cuza », Jassy, 6600, *République socialiste de Roumanie.*