1 Serii de direcţii înfăşurătoare în varietăţi neolonome

Studii şi cercetări ştiinţifice, Iaşi,
Matematică, t. XI, f. 2, 1960, 343-354.

Noţiunea de direcţii înfăşurătoare a fost introdusă de K. Yano [10] în 1944 şi, independent, de M. Roth [7] în 1950. Această noţiune, care generalizează noţiunea de direcţii concurente, introdusă de acad. A. Myller [4] şi noţiunea de direcţii paralele, introdusă de T. Levi-Civita [2], s-a dovedit destul de utilă atât în studiul spaţiilor metrice cât şi al spaţiilor cu conexiune afină.

In Nota de faţă ne propunem să introducem noţiunea de direcţii înfăşurătoare în varietăţi neolonome dintr-un spaţiu X_n, cu conexiune metrică cu torsiune, şi să facem câteva aplicaţii ale acestei noţiuni la studiul liniilor de curbură şi al anumitor reţele de pe varietăţile neolonome.

Vom folosi, în cele ce urmează, notaţiile şi rezultatele din [11], pentru varietăţi neolonome în spaţii cu conexiune metrică cu torsiune, şi din [8], pentru serii de direcţii înfăşurătoare.

1. Considerăm un spaţiu X_n prevăzut cu o conexiune metrică cu torsiune şi fie a_{ij}, Γ^i_{jk} şi T^i_{jk} respectiv tensorul metric, obiectul conexiunii şi tensorul de torsiune. Aceste mărimi sunt legate prin relaţiile:

$$a_{ij;k} = 0 \text{ şi } \Gamma^i_{[jk]} = T^i_{jk}, \ (i,j,k = 1,2,...,n). \tag{1}$$

Dupa cum se ştie, fiind daţi tensorii a_{ij} şi T^i_{jk} ei determină, prin aceste relaţii, în mod unic obiectul conexiunii. Spaţiul X_n este un spaţiu Riemann dacă şi numai dacă tensorul de torsiune este nul.

Un sistem de $n-m$ ecuaţii Pfaff care nu-i complet integrabil

$$\lambda_{Ai} dx^i = 0, \ (A,B,C = m+1,...,n), \tag{2}$$

unde λ_{Ai} sunt $n-m$ vectori covarianţi liniar independenţi, defineşte o varietate neolonomă X_n^m scufundată în X_n. Notând cu λ^i_A vectorii contravarianţi corespunzători, ecuaţiile (2) devin

$$a_{ij}\lambda^i_A dx^j = 0. \tag{2'}$$

Normăm cei $n-m$ vectori λ^i_A luându-i unitari şi considerăm încă m vectori contravarianţi liniar independenţi şi unitari λ^i_a $(a,b,c = 1,2,...,m)$ care să fie ortogonali vectorilor λ^i_A, adică să satisfacă relaţiile

$$a_{ij}\lambda^i_A\lambda^j_a = 0 \tag{3}$$

Alături de reperul determinat de vectorii λ^i_a şi λ^i_A, considerăm reperul reciproc format de vectorii λ^a_i şi λ^A_i, legaţi de primii prin relaţiile

$$\lambda^i_\alpha \lambda^\beta_i = \delta^\beta_\alpha \quad \lambda^i_\alpha \lambda^\alpha_j = \delta^i_j \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, ..., n).$$

Ecuaţiile varietăţii X^m_n pot fi scrise şi sub forma

$$dx^i = \lambda^i_a ds^a \tag{4}$$

unde

$$ds^a = \lambda^a_i dx^i.$$

Odată cu varietatea neolonomă X^m_n, putem considera varietatea neolonomă complementară X^{n-m}_n dată de ecuaţiile

$$\lambda_{ai} dx^i = 0 \tag{5}$$

sau

$$dx^i = \lambda^i_A ds^A, \tag{5'}$$

unde

$$ds^A = \lambda^A_i dx^i.$$

Metrica indusă în X^m_n este determinată de tensorul

$$a_{ab} = \lambda^i_a \lambda^j_b a_{ij} \tag{6}$$

iar obiectul conexiunii induse este

$$\Gamma^a_{bc} = \lambda^a_i \lambda^j_b \lambda^k_c \Gamma^i_{jk} + \lambda^a_i \lambda^i_{b,c}, \tag{7}$$

unde notăm, în general, pentru o funcţie $f(x^i)$

$$f_{,a} = \lambda^i_a f_{,i}.$$

Avem pentru X^m_n

$$a_{ab;c} = 0$$

şi

$$\Gamma^a_{[bc]} = T^a_{bc} + \omega^a_{bc},$$

în care T^a_{bc} este tensorul de torsiune indus în X^m_n, adică

$$T^a_{bc} = \lambda^a_i \lambda^j_b \lambda^k_c T^i_{jk},$$

iar

$$\omega^a_{bc} = \lambda^a_i \lambda^i_{[b,c]}.$$

Formulele fundamentale pentru X^m_n sunt

$$\lambda^i_{a;b} = \lambda^i_{a,b} + \lambda^j_a \lambda^k_b \Gamma^i_{jk} - \lambda^i_c \Gamma^c_{ab} = \Omega^A_{ab} \lambda^i_A, \tag{8}$$

$$\lambda^i_{A;b} = \lambda^i_{A,b} + \lambda^j_A \lambda^k_b \Gamma^i_{jk} - \lambda^i_B \Gamma^B_{Ab} = -\Omega^a_{bA} \lambda^i_a, \tag{9}$$

unde

$$\Gamma^B_{Ab} = \lambda^B_i \lambda^j_A \lambda^k_b \Gamma^i_{jk} + \lambda^B_i \lambda^i_{A,b},$$

$$\Omega^a_{bA} = a^{ac} a_{AB} \Omega^B_{cb}$$

iar

$$a_{AB} = \lambda^i_A \lambda^j_B a_{ij}$$

este tensorul metric al varietăţii X^{n-m}_n. Avem

$$\Omega^A_{[ab]} = T^A_{ab} + \omega^A_{ab}, \tag{10}$$

unde

$$T^A_{ab} = \lambda^A_i \lambda^j_a \lambda^k_b T^i_{jk}$$

iar ω^A_{ab} este tensorul de integrabilitate a varietăţii X^m_n dat de relaţiile

$$\omega^A_{ab} = \lambda^A_i \lambda^i_{[a,b]}.$$

2. Fie în X_n o curbă dată de ecuaţiile

$$x^i = x^i(s), \tag{11}$$

unde s este arcul curbei şi să considerăm în punctele M ale acestei curbe o serie de direcţii g date de vectorii unitari $\theta^i(s)$. Vom nota tot cu g dreptele corespunzătoare din spaţiile euclidiene tangente în punctele M ale curbei.

Seria de direcţii g este o serie înfăşurătoare în X_n de-a lungul curbei C dacă în harta euclidiană a spaţiului X_n în lungul acestei curbe, dreptele g corespunzătoare înfăşoară o curbă $\overline{C}$.

Analitic, aceasta revine la existenţa a două funcţii $\rho(s)$ şi $\lambda(s)$ astfel încât să avem de-a lungul curbei C

$$dx^i + D(\rho\theta^i) = \lambda\theta^i ds, \tag{12}$$

D fiind operatorul diferenţierii absolute în X_n.

Punctul $\overline{M}(x^i + \rho\theta^i)$ de pe dreapta g ce trece prin punctul $M(x^i)$ al curbei C se numeşte punct principal al dreptei g, vectorul $M\overline{M}$, vector principal, iar curba $\overline{C}$ se numeşte curba asociată seriei de direcţii g.

Se vede că funcţia ρ este lungimea vectorului principal, iar funcţia λ, este raportul dintre elementul de arc $d\bar{s}$ al curbei $\overline{C}$ şi elementul de arc ds al curbei C. De aici rezultă că parametrul τ definit de relaţia

$$d\tau = \frac{\lambda ds}{\rho} \tag{13}$$

este un invariant al seriei de direcţii g de-a lungul curbei C, numit parametru principal.

Notând cu ξ^i vectorul principal, $\xi^i = \rho\theta^i$, ecuaţiile înfăşurării capătă forma

$$dx^i + D\xi^i = \xi^i d\tau. \tag{12'}$$

In particular, dacă curba asociată $\overline{C}$ se reduce la un punct, direcţiile g sunt concurente în sens Myller, iar dacă acest punct este aruncat la infinit, direcţiile g sunt paralele în sens Levi-Civita.

In acelaşi mod putem defini noţiunea de serii de direcţii înfăşurătoare în X^m_n.

3. 0 serie de direcţii g, date de vectorii

$$\theta^i = \theta^a \lambda^i_a \tag{13'}$$

în punctele unei curbe C din X^m_n, este înfăşurătoare în X^m_n de-a lungul curbei C dacă în harta euclidiană a varietăţii X^m_n în lungul acestei curbe dreptele g corespunzătoare înfăşoară cu o curbă $\overline{C}$.

Pentru aceasta este necesar şi suficient să existe doua funcţii $\rho(s)$ şi $\lambda(s)$ astfel încât în punctele curbei C să avem

$$ds^a + D(\rho\theta^a) = \lambda\theta^a ds \tag{14}$$

şi aici g reprezintă lungimea vectorului principal $\xi^a = \rho\theta^a$, iarλ raportul dintre elementul de arc al curbei asociate $\overline{C}$ şi elementul de arc al curbei C. Introducând parametrul principal $d\tau = \dfrac{\lambda ds}{\rho}$, ecuaţiile înfăşurării devin

$$ds^a + D\xi^a = \xi^a d\tau. \tag{14'}$$

In particular, dacă desfăşurabila descrisă de dreptele g în hartă se reduce la un con, direcţiile g sunt concurente în sens Myller, iar dacă se reduce la un cilindru direcţiile g sunt paralele în sens Levi-Civita.

Să luăm o serie de direcţii g oarecare tangente la X^m_n $(m > 2)$ în lungul curbei C din X^m_n. Oricare ar fi funcţiile $\rho(s)$ şi $\lambda(s)$ avem din (8) şi (13)

$$\frac{dx^i}{ds} + \frac{D(\rho\theta^i)}{ds} - \lambda\theta^i = \left(\frac{ds^a}{ds} + \frac{D(\rho\theta^a)}{ds} - \lambda\theta^a\right)\lambda^i_a + \rho\Omega^A_{ab}\theta^a \frac{ds^b}{ds}\lambda^i_A. \tag{15}$$

Din aceste relaţii rezultă:

Condiţia necesară şi suficientă ca o serie de direcţii g, tangente la X^m_n $(m > 2)$ de-a lungul unei curbe C din X^m_n, să fie înfăşurătoare în spaţiul X_n este ca ea să fie înfăşurătoare în X^m_n şi unilateral conjugată cu seria direcţiilor tangente la curba C. In acest caz vectorii şi parametrii principali relativi la X_n şi X^m_n sunt aceiaşi, deoarece funcţiile ρ şi λ sunt aceleaşi.

Pentru o serie de direcţii oarecare, tangente la X^m_n în punctele unei curbe C, putem fixa doua funcţii ρ şi λ în felul următor: considerăm riglata descrisă de dreptele g în harta euclidiană a varietăţii X^m_n şi luăm funcţia ρ egală cu distanţa de la punctul curbei corespunzătoare lui C în hartă, la punctul unde dreapta g întâlneşte linia de stricţiune a riglatei iar funcţia λ egală cu raportul dintre elementul de arc al liniei de stricţiune şi elementul de arc al curbei C.

In acest fel putem asocia seriei de direcţii g o serie de direcţii în X^m_n dată de vectorul

$$\zeta^a = \frac{ds^a}{ds} + \frac{D(\rho\theta^a)}{ds} - \lambda\theta^a \tag{16}$$

şi o curbură corespunzătoare

$$\frac{1}{r} = \sqrt{a_{ab}\zeta^a\zeta^b} \tag{17}$$

numite, respectiv, serie de direcţii şi curbură asociate de înfăşurare, seriei g în X^m_n.

Totodată obţinem o serie de direcţii în X_n dată de vectorul

$$\xi^i = \frac{dx^i}{ds} + \frac{D(\rho\theta^i)}{ds} - \lambda\theta^i \tag{18}$$

şi o curbură

$$\frac{1}{R}=\sqrt{a_{ij}\zeta^i\zeta^j} \tag{19}$$

numite respectiv serie de direcţii şi curbură asociate de înfăşurare seriei g în X_n, relative la X_n^m.

Cu aceste noţiuni obţinem rezultatul:

Seria de direcţii g este înfăşurătoare în $X_n^m(X_n)$ dacă şi numai dacă seria de direcţii asociate de înfăşurare în $X_n^m(X_n)$ este nedeterminată sau ceea ce este acelaşi lucru, curbura asociată de înfăşurare în $X_n^m(X_n)$ este nulă.

Din (15) rezultă: Condiţia necesară şi suficientă ca seria de direcţii g să fie înfăşurătoare în X_n^m este ca seria de direcţii asociată de înfăşurare în X_n relativa la X_n^m să fie ortogonală varietăţii X_n^m.

Tot din (15) rezultă relaţia

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{\rho^2}{K_n^2}, \tag{20}$$

unde

$$\frac{1}{K_n^2}=a_{AB}\Omega^A_{ab}\Omega^B_{cd}\theta^a\,\frac{ds^b}{ds}\,\theta^c\,\frac{ds^d}{ds}$$

este curbura normală a seriei de direcţii g cu privire la curba C, noţiune introdusă de T.K. Pan pentru varietăţi olonome [6].

Relatia (20) ne dă acelaşi rezultat ca şi (17), adică seria de direcţii g este înfăşurătoare în X_n dacă şi numai dacă este înfăşurătoare în X_n^m şi unilateral conjugată cu seria de direcţii tangente la curba C.

Din (15) sau (20) rezultă de asemenea: Condiţia necesară şi suficientă ca orice serie de direcţii tangente la X_n^m, care este înfăşurătoare în X_n^m, să fie înfăşurătoare şi în X_n este

$$\Omega^A_{ab}=0,$$

adică varietatea X_n^m să fie plană.

Rezultate asemănătoare se obţin pentru serii de direcţii concurente sau paralele prin particularizări corespunzătoare.

Dacă varietatea neolonomă este bidimensională, atunci orice serie de direcţii tangente la varietate este înfăşurătoare în varietate şi deci $\frac{1}{r}=0\cdot$

In acest caz, noţiunea de direcţii unilateral conjugate în X_n^2 poate fi definită cu ajutorul noţiunii de direcţii înfăşurătoare în X_n aşa cum se procedează de obicei în cazul varietăţilor neolonome din S_3 euclidian.

4. Cu ajutorul înfăşurării putem defini liniile de curbură pe X_n^m în raport cu o direcţie normală λ^i_A. Spunem că curba C din X_n^m este linie de curbură în raport cu direcţia normală λ^i_A dacă seria de direcţii λ^i_A este înfăşurătoare în X_n de-a lungul curbei C.

Din ecuaţiile înfăşurării, care pot fi scrise şi sub forma

$$dx^i+\rho D\lambda^i_A=d\mu\lambda^i_A, \tag{21}$$

unde

$$d\mu=d\rho-\lambda ds,$$

unde ds^1 şi ds^2 sunt elementele de arc ale liniilor reţelei. Cum pe X_n^2 orice serie de direcţii de-a lungul unei curbe este înfăşurătoare în X_n^2, rezultă că reţeaua dată este întotdeauna înfăşurătoare în X_n^2, în sensul că seria de direcţii tangente la liniile unei familii este înfăşurătoare în X_n^2 de-a lungul liniilor celeilalte familii.

Pentru aceste serii de direcţii avem respectiv

$$\begin{gathered} ds^2 = 0, \quad \theta_1^i = \lambda_2^i, \quad \theta_1^a = (0,1), \\ \text{şi} \\ ds^1 = 0, \quad \theta_2^i = \lambda_1^i, \quad \theta_2^a = (1,0), \end{gathered} \tag{38}$$

iar din ecuaţiie înfăşurării (14) obţinem

$$\begin{gathered} 1 + \rho_1 \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial s^1} + \rho_1 \Gamma_{21}^2 - \lambda_1 = 0 \\ \text{şi} \\ 1 + \rho_2 \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial s^2} + \rho_2 \Gamma_{12}^1 - \lambda_2 = 0 \end{gathered} \tag{39}$$

de unde se determină funcţiile $\rho_1, \lambda_1, \rho_2$ şi λ_2.

Putem considera în particular reţelele pentru care elementul de arc al unei curbe dintr-o familie este egal cu elementul de arc al curbei asociate seriei de direcţii tangente la liniile celeilalte familii în lungul ei, deci pentru care avem

$$d\bar{s}^1 = ds^1 \text{ şi } d\bar{s}^2 = ds^2.$$

Ţinând seama de semnificaţia funcţiilor λ_1 şi λ_2 avem$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ şi deci pentru astfel de reţele, eliminând ρ_1 şi ρ_2 din (39), obţinem .

$$\frac{\partial \log \Gamma_{21}^1}{\partial s^1} = \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^1, \quad \frac{\partial \log \Gamma_{12}^2}{\partial s^2} = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2. \tag{40}$$

Putem considera de asemenea reţele pentru care parametrul principal al seriei tangentelor la liniile unei familii de-a lungul unei linii a celeilalte familii este egal cu elementul de arc al acelei linii. Adică

$$d\tau_1 = ds^1 \text{ şi } d\tau_2 = ds^2.$$

De aici rezultă $\lambda_1 = \rho_1$ şi $\lambda_2 = \rho_2$, iar din (39) obţinem pentru aceste reţele

$$\frac{\partial \log \Gamma_{21}^1}{\partial s^1} = \Gamma_{21}^2 - 1, \quad \frac{\partial \log \Gamma_{12}^2}{\partial s^2} = \Gamma_{12}^1 - 1. \tag{41}$$

Dacă tangentele la liniile fiecărei familii sunt concurente în X_n^2 de-a lungul liniilor celeilalte familii, obţinem reţelele Myller pe X_n^2 [3], care se caracterizează prin condiţiile

$$\frac{\partial \log \Gamma_{21}^1}{\partial s^1} = \Gamma_{21}^2, \quad \frac{\partial \log \Gamma_{12}^2}{\partial s^2} = \Gamma_{12}^1 \tag{42}$$

deduse din (39) luând $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Dacă tangentele la liniile fiecărei familii sunt paralele în X_n^2 în lungul liniilor celeilalte familii, obţinem reţelele Cebîşev pe X_n^2, caracterizate prin condiţiile

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0 \tag{43}$$

deduse din ecuaţiile

$$\begin{gathered} ds^2 = 0, \quad \theta_1^a = (0,1), \quad \delta\theta_1^a = 0, \\ ds^1 = 0, \quad \theta_2^a = (1,0), \quad \delta\theta_2^a = 0. \end{gathered}$$

Reţelele Myller şi reţelele Cebîşev au fost introduse pentru varietăţi neolonome din S_3 euclidian de Gh. Gheorghiev [1].

6. Cu ajutorul noţiunii de direcţii înfăşurătoare putem defini reţelele conjugate pe X_n^2 în felul următor:

Spunem că o reţea pe X_n^2 este conjugată dacă direcţiile tangente a liniilor fiecărei familii sunt înfăşurătoare în X_n de-a lungul liniilor celeilalte familii.

Luând ca vectori λ_1^i şi λ_2^i vectorii unitari tangenţi la liniile reţelei, obţinem, ţinând seama de (12) şi (38), pentru o reţea conjugată condiţiile

$$(44)\qquad \begin{aligned} &\lambda_1^i + \frac{\partial \rho_1}{\partial s^1}\lambda_2^i + \rho_1\left(\frac{\partial \lambda_2^i}{\partial s^1} + \Gamma_{jk}^i \lambda_2^j \lambda_1^k\right) - \lambda_1 \lambda_2^i = 0,\\ &\lambda_2^i + \frac{\partial \rho_1}{\partial s^2}\lambda_1^i + \rho_2\left(\frac{\partial \lambda_1^i}{\partial s^2} + \Gamma_{jk}^i \lambda_1^j \lambda_2^k\right) - \lambda_2 \lambda_1^i = 0\end{aligned}$$

care, având în vedere (8), devin

$$(45)\qquad \begin{aligned} &\lambda_1^i + \frac{\partial \rho_1}{\partial s^1}\lambda_2^i + \rho_1\left(\Gamma_{21}^a \lambda_a^i + \Omega_{21}^A \lambda_A^i\right) - \lambda_1 \lambda_2^i = 0,\\ &\lambda_2^i + \frac{\partial \rho_2}{\partial s^2}\lambda_1^i + \rho_2\left(\Gamma_{12}^a \lambda_a^i + \Omega_{12}^A \lambda_A^i\right) - \lambda_1 \lambda_1^i = 0.\end{aligned}$$

De aici rezultă relaţiile

$$(46)\qquad \begin{aligned} &1 + \rho_1 \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial s^1} + \rho_1 \Gamma_{21}^2 - \lambda_1 = 0, \quad \Omega_{21}^A = 0,\\ &1 + \rho_2 \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial s^2} + \rho_2 \Gamma_{12}^1 - \lambda_2 = 0, \quad \Omega_{12}^A = 0,\end{aligned}$$

şi deci reţelele conjugate sunt caracterizate ca reţele parametrice prin condiţiile

$$(47)\qquad \Omega_{12}^A = \Omega_{21}^A = 0, \ (A = m+1, ..., n).$$

Din (10) rezultă pentru reţele conjugate relaţiile

$$(48)\qquad T_{ab}^A + W_{ab}^A = 0.$$

De aici deducem că reţele conjugate pot exista pe X_n^2 numai dacă X_n are torsiune.

In adevăr, dacă X_n nu are torsiune atunci $T_{ab}^A = 0$ şi deci $W_{ab}^A = 0$, adică X_n^2 trebuie să fie olonomă.

Vom obţine reţele conjugate particulare şi varietăţi X_n^2 corespunzătoare particulare, dacă la condiţiile (47) adăugăm condiţiile (42) sau (43).

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghiev Gh., *Despre geometria intrinsecă a unui câmp de vectori.* St. şi cerc. şt. Acad. R.P.R. Iaşi, 1951, T. II, f. 3-4, p. 1-21.
2. Levi-Civita T., *Nazione di parallelismo in una varietà qualunque e cansequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana.* Rend. Circ. Mat. Palermo, 1917, T. XLII, p. 173-204.
3. Mayer 0., *Etudes sur les réseaux de M. A. Myller.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 1927, t. XIV, f. 3-4, p. 169-204.
4. Myller A., *Direziani concorrenti sopra una superficie spicate dei punti di una curva.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 1924, T. XXXIII, serie 5, sem. J, p. 339-341.

5. Myller A, *Directions concurrentes dans une variété métrique à n dimensions.* Bull. Soc. Math. France, T. 56, 1928, p. 1-6.
6. Pan T.K., *Normal curvature of a vector field.* Amer. J. Math. 74 (1952), p. 955-966.
7. Roth M., *O generalizare a noţiunii de direcţii concurente în sensul academicianului Myller.* Lucr. ses. şt. gen. a Acad. R.P.R din 2-12 iunie 1950, p. 321-334.
8. Roth M, *Studiul direcţiilor înfăşurătoare într-un spaţiu cu conexiune afină,* St. şi cerc. mat. Acad. R.P.R., 1952, T. III, nr. 1-2, p. 123-233.
9. Vrănceanu Gh., *Les espaces non-holonomes.* Mém. des Sci. Math., f. 77.
10. Yano K., *On the torse forming directions in Riemannian space.* Proc. Imp. Acad. Tokyo 1944, 20, p. 340-345.
11. Yano K. et Petrescu Şt., *Sur les espaces métriques non-holonames camplémentaires.* Disquisitiones mathematicae et physicae, 1940, T. I, f. 1, p. 191-246.