2 Asupra teoriei suprafeţelor în spaţiul afin-axial parabolic

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi
s. I-a, Mat., t. IX, 1963, f. 2, 437-444.

In Nota de faţă ne ocupăm cu teoria suprafeţelor în spaţiul afin-axial parabolic, continuând astfel studiul acestui spaţiu început prin lucrarea [1] cu teoria curbelor.

Am definit spaţiul afin-axial parabolic ca spaţiul Klein simplu al cărui grup fundamental este grupul proiectiv care pastrează un plan Π numit *plan absolut* şi o dreaptă Δ situată în acest plan numit *dreaptă absolută* sau *axă*. Dreptele şi planele care trec prin axa spaţiului le-am numit respectiv *drepte* şi *plane axiale.*

Pentru studiul suprafeţelor în acest spaţiu este avantajos să alegem ca reper mobil un reper afin (A, e_1, e_2, e_3) pentru care vectorul e_3 este situat în planul axial prin A, iar segmentul determinat de extremităţile vectorilor e_1 şi e_2 are mijlocul situat în acest plan. Mişcarea unui astfel de reper este dată de ecuaţiile

(1) $$dM = \omega_{0j} e_j, \; de_i = \omega_{ij} e_j, \; (i, j, k = 1, 2, 3),$$

cu condiţiile

(2) $$\omega_{11} + \omega_{21} = \omega_{12} + \omega_{22}, \; \omega_{31} = \omega_{32}.$$

Ecuaţiile de structură ale spaţiului sunt

(3) $$D\omega_{0i} = [\omega_{0k}, \omega_{ki}], \; D\omega_{ij} = [\omega_{ik}, \omega_{kj}],$$

iar condiţiile de fixitate ale unui punct $M(x_1, x_2, x_3)$ referit la reperul mobil sunt date de relaţiile

(4) $$dx_i + \omega_{0i} + x_k \omega_{ki} = 0.$$

In relaţiile (3) şi (4) trebuie să ţinem seama de condiţiile (2).

Fie o suprafaţă analitică Σ dată faţă de un reper fix prin ecuaţiile

(5) $$X_i = X_i(u, v),$$

unde funcţiile $X_i(u, v)$ sunt analitice într-un domeniu D de variaţie a parametrilor u şi v şi satisfac condiţia

(6) $$X_{1u} - X_{2u} \neq 0 \text{ sau } X_{1v} - X_{2v} \neq 0,$$

care exprimă că planul tangent la suprafaţa în fiecare punct nu este axial.

Familia reperelor de ordinul zero, adică a reperelor cu originea A în punctele suprafeţei, depinde de doi parametri principali şi şapte parametri secundari. Luând vectorii e_1 şi e_2 în planul tangent al suprafeţei fixăm doi parametri secundari şi obţinem familia reperelor de ordinul doi, faţă de care suprafaţa satisface ecuaţia

(7) $$\omega_{03} = 0.$$

Diferenţiind exterior această ecuaţie şi ţinând seama de ecuaţiile de structură, obţinem, aplicând lema lui Cartan

$$\omega_{13} = a_2\omega_{01} + b_2\omega_{02},\ \omega_{23} = b_2\omega_{01} + c_2\omega_{02}, \tag{8}$$

unde coeficienţii a_2, b_2, c_2 sunt de ordinul doi diferenţial.

Aceeaşi operaţie aplicată ecuaţiilor (8) ne dă

$$\begin{aligned} &da_2 + a_2(\omega_{33} - 2\omega_{11}) - 2b_2\omega_{12} = -2a_3\omega_{01} - 2b_3\omega_{02}, \\ &db_2 + b_2(\omega_{33} - \omega_{22} - \omega_{11}) - a_2\omega_{21} - c_2\omega_{12} = -2b_3\omega_{01} - 2b_3'\omega_{02},\ 0(9) \\ &pdc_2 + c_2(\omega_{33} - 2\omega_{22}) - 2b_2\omega_{21} = -2b_3'\omega_{01} - 2c_3\omega_{02} \end{aligned}$$

şi deci pentru o variaţie datorită numai parametrilor secundari obţinem

$$\begin{aligned} &\delta a_2 + a_2(e_{33} - 2e_{11}) - 2b_2e_{12} = 0, \\ &\delta b_2 + b_2(e_{33} - e_{22} - e_{11}) - a_2e_{21} - c_2e_{12} = 0, \\ &\delta c_2 + c_2(e_{33} - 2e_{22}) - 2b_2e_{21} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Aceste relaţii ne conduc la ecuaţiile invariante finite

$$a_2c_2 - b_2^2 = 0,\ a_2 + 2b_2 + c_2 = 0, \tag{11}$$

şi împreună cu

$$\delta\omega_{01} = -e_{11}\omega_{01} - e_{21}\omega_{02},\ \delta\omega_{02} = -e_{12}\omega_{01} - e_{22}\omega_{02}, \tag{12}$$

la ecuaţia invariantă diferenţială

$$a_2\omega_{01}^2 + 2b_2\omega_{01}\omega_{02} + c_2\omega_{02}^2 = 0. \tag{13}$$

Ecuaţia (13) dă liniile asimptotice ale suprafeţei iar ecuaţiile (11) caracterizează respectiv suprafeţele desfăşurabile şi riglatele cu plan director axial.

Excluzând aceste clase de suprafeţe putem fixa (în cazul analitic) trei din parametrii secundari punând

$$a_2 = c_2 = 0,\ b_2 = 1 \tag{14}$$

şi obţinem familia reperelor de ordinul doi pentru care vectorii e_1 şi e_2 sunt situaţi pe tangentele asimptotice. Pentru aceste repere avem relaţiile

$$\begin{aligned} &\omega_{03} = 0,\ \omega_{13} = \omega_{02},\ \omega_{23} = \omega_{01},\ \omega_{12} = a_3\omega_{01} + b_3\omega_{02}, \\ &\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33} = 2b_3\omega_{01} + 2b_3'\omega_{02},\ \omega_{21} = b_3'\omega_{01} + c_3\omega_{02}. \end{aligned} \tag{15}$$

Obţinem de aici

$$\begin{aligned} &[da_3 + a_3(\omega_{22} - 2\omega_{11}) + a_3b_3'\omega_{02}, \omega_{01}] + [db_3 - b_3\omega_{11} + \omega_{32} + b_3^2\omega_{01}, \omega_{02}] = 0, \\ &[db_3 - b_3\omega_{11} + \omega_{32} + b_3^2\omega_{01}, \omega_{01}] + [db_3' - b_3'\omega_{22} + \omega_{32} + b_3'^2\omega_{02}, \omega_{02}] = 0, \\ &[db_3' - b_3\omega_{22} + \omega_{32} + b_3'^2\omega_{02}, \omega_{01}] + [dc_3 + c_3(\omega_{11} - 2\omega_{22}) + c_3b_3\omega_{01}, \omega_{02}] = 0. \end{aligned}$$

Considerând apoi o variaţie datorită numai parametrilor secundari şi ţinând seama de (2), găsim relaţiile

$$\delta a_3 - a_3e_{11} = 0,\ \delta b_3 - b_3e_{11} + e_{31} = 0,\ \delta b_3' - b_3'e_{11} + e_{31} = 0,\ \delta c_3 - c_3e_{11} = 0. \tag{17}$$

Ele pun în evidenţă ecuaţiile invariante

$$a_3 = 0,\ c_3 = 0,\ a_3 \pm c_3 = 0,\ b_3 - b_3' = 0 \tag{18}$$

şi invarianţii finiţi de ordinul trei

$$I = \frac{a_3}{b'_3 - b_3}, \; I_2 = \frac{c_3}{b_3 - b'_3}. \tag{19}$$

Tot relaţiile (17), împreună cu relaţiile

$$\delta\omega_{01} = -e_{11}\omega_{01}, \; \delta\omega_{02} = -e_{11}\omega_{02} \tag{20}$$

ne dau invarianţii diferenţiali de ordinul trei

$$\varphi_1 = a_3\omega_{01}, \; \varphi_2 = c_3\omega_{02}. \tag{21}$$

Faţă de un reper de ordinul doi obţinem, din ecuaţiile (15) şi condiţiile de fixitate (4), pentru suprafaţă, dezvoltarea

$$z = xy - \frac{1}{3}\left(a_3x^3 + 3b_3x^2y + 3b'_3xy^2 + c_3y^3\right) + (4), \tag{22}$$

iar pentru liniile asimptotice $C_1(\omega_{02} = 0)$ şi $C_2(\omega_{01} = 0)$ dezvoltările

$$(C_1) \begin{cases} y = \frac{1}{2}\,a_3x^2 + (3), \\ z = \frac{1}{6}\,a_3x^3 + (4), \end{cases} \qquad (C_2) \begin{cases} x = \frac{1}{2}\,c_3y^2 + (3), \\ z = \frac{1}{6}\,c_3y^3 + (4), \end{cases} \tag{23}$$

Intersectând suprafaţa cu planul axial prin A obţinem curba axială care are ecuaţiile

$$y = x, \; z = x^2 - \frac{1}{3}\left[a_3 + 3(b_3 + b'_3) + c_3\right]x^3 + (4). \tag{24}$$

Cuadricele osculatoare, adică acele care au contact de ordinul doi cu suprafaţa în punctul A formează o familie cu trei parametri dată de ecuaţia

$$z - xy + \lambda xz + \mu yz + \nu z^2 = 0. \tag{25}$$

O cuadrică a familiei taie suprafaţa după o curbă care are punctul A ca punct triplu cu tangentele

$$-\frac{1}{3}\left(a_3x^3 + 3b_3x^2y + 3b'_3xy^2 + c_3y^3\right) + (\lambda x + \mu y)xy = 0. \tag{26}$$

Direcţiile, pentru care aceste tangente sunt confundate, sunt direcţiile lui Darboux date de ecuaţia

$$a_3x^3 + c_3y^3 = 0. \tag{27}$$

iar direcţiile conjugate lor sunt *direcţiile lui Segre* reprezentate de ecuaţia

$$a_3x^3 - c_3y^3 = 0. \tag{28}$$

Cuadricele osculatoare care taie suprafaţa după o curbă, care are ca tangente în punctul A tangentele lui Darboux prin acest punct, formează fasciculul

$$z - xy + b_3xz + b'_3yz + \nu z^2 = 0, \tag{29}$$

numit *fasciculul cuadricelor lui Darboux.* Locul centrelor acestor cuadrice este dreapta

$$x = b'_3z, \; y = b_3z \tag{30}$$

numită *normala afină*, iar centrul fasciculului de drepte conjugate axei faţă de cuadricele Darboux este punctul

$$P\left(\frac{1}{b_3'-b_3}, \frac{1}{b_3-b_3'}, 0\right) \tag{31}$$

situat în planul tangent, numit *punctul axial.* Acest punct, împreună cu A, determină tangenta conjugată tangentei axiale.

Fasciculul lui Darboux este tăiat de planul axial prin A după fasciculul de conice

$$y = x, \ z - x^2 + (b_3 + b_3')xz + \nu z^2 = 0, \tag{32}$$

ale căror centre (polii axei) descriu dreapta

$$x = y = \frac{1}{2}(b_3 + b_3')z \tag{33}$$

pe care o numim *normala afin-axială parabolică* a suprafeţei. Ea este în acelaşi timp şi dreapta de intersecţie a planului axial cu planul care trece prin normala afină şi punctul axial.

Conicele din planul axial care au cu curba axială contact de ordinul trei formează fasciculul

$$y = x, \ z - x^2 + \frac{1}{3}\left[a_3 + 3(b_3 + b_3') + c_3\right]xz + hz^2 = 0 \tag{34}$$

iar locul centrelor lor este dreapta

$$x = y = \frac{1}{6}\left[a_3 + 3(b_3 + b_3') + c_3\right]z \tag{35}$$

numită *normală afină* a curbei axiale.

Parabola din planul tangent care are contact de ordinul doi cu asimptotica C_1 şi este tangenta planului absolut în punctul de intersecţie al acestuia cu tangenta la asimptotica C_2 are ecuaţia

$$a_3x^2 - 2y = 0, \tag{36}$$

iar parabola analogă referitoare la C_2 are ecuaţia

$$c_3y^2 - 2x = 0. \tag{37}$$

Cele două parabole sunt tăiate de tangenta axiala în A şi respectiv în punctele

$$Q_1\left(\frac{2}{a_3}, \frac{2}{a_3}, 0\right), \quad Q_2\left(\frac{2}{c_3}, \frac{2}{c_3}, 0\right). \tag{38}$$

Ecuaţiile invariante (19) conduc la următoarele clase de suprafeţe:

Suprafeţele pentru care $a_3 = 0$ sau $c_3 = 0$ sunt suprafeţele riglate.
Suprafeţele pentru care $a_3 + c_3 = 0$ se caracterizează prin una din proprietăţile:

- 0 familie de linii Darboux coincide cu familia liniilor axiale.
- Tangenta axială taie parabolele (36), (37) în afară de punctul A în două puncte Q_1 şi Q_2 simetrice faţă de punctul A al suprafeţei.

Suprafeţele pentru care $a_3 - c_3 = 0$ se caracterizează prin una din proprietăţile:

- 0 familie de linii Segre coincide cu familia liniilor axiale.
- Tangenta axială taie parabolele (36), (37) în afară de punctul A în două puncte Q_1 şi Q_2 confundate.

Suprafeţele pentru care $a_3 = c_3 = 0$ sunt cuadrice.
Suprafeţele pentru care $b_3 - b_3' = 0$ se caracterizează prin una din proprietăţile:

- Normala afină trece prin axa spaţiului.
- Punctul axial aparţine planului absolut.

Fie acum P_1 şi R_1 respectiv proiecţiile lui P şi Q_1 pe tangenta la asimptotica C_1, paralele cu tangenta la asimptotica C_2, iar P_2 şi R_2 proiecţiile punctelor P şi Q_2 pe tangenta la asimptotica C_2, paralele cu tangenta la asimptotica C_1. Obţinem atunci pentru invarianţii finiţi interpretările

$$I_1 = 2\,\frac{AP_1}{AR_1},\quad I_2 = 2\,\frac{AP_2}{AR_2}\cdot \tag{39}$$

Considerând apoi punctele A_1' şi A_2' vecine cu A şi situate respectiv pe tangentele la asimptoticele C_1 şi C_2 obţinem pentru invarianţii diferenţiali interpretările

$$\varphi_1 = 2p\cdot \mathrm{pr}\cdot\frac{AA_1'}{AR_1},\quad \varphi_2 = 2p\cdot \mathrm{pr}\cdot\frac{AA_2'}{AR_2}\cdot \tag{40}$$

Fixăm acum unul din parametrii secundari rămaşi punând

$$b_3 + b_3' = 0, \tag{41}$$

ceea ce inseamnă că luăm vectorul e_3 pe normala afin-axială parabolică (33) a suprafeţei.

Cuadrica osculatoare tangentă planului absolut în punctul de intersecţie al acestuia cu normala afin-axială parabolică are atunci ecuaţia

$$z - xy = 0 \tag{42}$$

şi o numim *paraboloidul osculator.* Cu ajutorul lui putem da încă două proprietăţi caracteristice pentru suprafeţele $b_3 + b_3' = 0$ şi anume:

- paraboloidul osculator aparţine fasciculului lui Darboux;
- sistemul tangentelor la curba de intersecţie a paraboloidului osculator cu suprafaţa în punctul A este apolar cu sistemul tangentelor asimptotice prin acest punct.

Normala afină a curbei axiale taie paraboloidul osculator în punctul A şi punctul

$$U\left(\frac{6}{a_3+c_3},\frac{6}{a_3+c_3},\frac{36}{(a_3+c_3)^2}\right). \tag{43}$$

Alegând acest punct ca punct unitate, deci punând

$$a_3 + c_3 = 6, \tag{44}$$

fixăm şi ultimul parametru secundar şi obţinem reperul canonic pentru care avem relaţiile

$$\begin{aligned}&\omega_{30} = 0,\ \omega_{13} = \omega_{02},\ \omega_{23} = \omega_{01},\ \omega_{12} = (3+a)\omega_{01} + b\omega_{02},\\ &\omega_{21} = -b\omega_{01} + (3-a)\omega_{02},\ \omega_{11} = \lambda\omega_{21} + \mu\omega_{02},\ \omega_{22} = \lambda\omega_{01} + \rho\omega_{02},\\ &\omega_{33} = (\lambda+\nu-2)\omega_{01} + (\mu+\rho+2b)\omega_{02},\ \omega_{31} = \omega_{32} = \sigma\omega_{01} + \tau\omega_{02},\end{aligned} \tag{45}$$

unde

$$a = \frac{a_3 - c_3}{2}, \; b = b_3, \; \lambda = \nu + 3 + a + b, \; \rho = \mu + 3 - a - b. \tag{46}$$

Ţinând seama de ecuaţiile de structură, obţinem din (45) ecuaţiile

$$\begin{aligned}
&D\omega_{01} = (b+\mu)[\omega_{01}, \omega_{02}], \; D\omega_{02} = (b-\nu)[\omega_{01}, \omega_{02}],\\
&[da, \omega_{01}] + [db, \omega_{02}] + [(3+a)(b+\mu) - 9 + a^2 - b\nu + \sigma][\omega_{01}, \omega_{02}] = 0,\\
&[db, \omega_{01}] + [da, \omega_{02}] + [(3-a)(\nu-b) - 9 + a^2 + b\mu + \tau][\omega_{01}, \omega_{02}] = 0,\\
&[d\sigma, \omega_{01}] + [db\tau, \omega_{02}] + 2[\sigma(b+\mu) + \tau(b-\nu)][\omega_{01}, \omega_{02}] = 0,\\
&[d\nu, \omega_{01}] + [d\mu, \omega_{02}] + [b(\mu+\nu) - \sigma + \tau][\omega_{01}, \omega_{02}] = 0,\\
&[db, \omega_{01}] + [db, \omega_{02}] + [b(\mu+\nu) - \sigma - \tau][\omega_{01}, \omega_{02}] = 0,
\end{aligned} \tag{46}$$

de unde rezultă

Teorema fundamentală. *Cele două forme diferenţiale invariante ω_{01}, ω_{02} împreună cu invarianţii $a, b, \mu, \nu, \sigma, \tau$ legaţi prin condiţiile (47) determină o suprafaţă, prin intermediul sistemului complet integrabil (1) cu coeficienţii ω_{ij} daţi de relaţiile (45) până la o transformare afin-axială parabolică. Sunt excluse suprafeţele desfăşurabile, riglatele cu plan director şi suprafeţele cu o familie de linii Darboux axiale.*

Pentru suprafeţele cu o familie de linii Darboux axiale ($a_3 + c_3 = 0$) şi diferite de cuadrice, putem fixa ultimul parametru secundar punând

$$a_3 = 1 \tag{48}$$

şi deci $c_3 = -1$. Aceasta înseamnă că luam ca punct unitate punctul de intersecţie al paraboloidului osculator cu paralela la normala afin-axială parabolică dusă prin mijlocul segmentului AQ_1. Pentru reperul canonic astfel obţinut avem relaţiile

$$\begin{aligned}
&\omega_{03} = 0, \; \omega_{13} = \omega_{02}, \; \omega_{23} = \omega_{01}, \; \omega_{12} = \omega_{01} + b\omega_{02},\\
&\omega_{02} = -b\omega_{01} - \omega_{02}, \; \omega_{11} = \lambda\omega_{01} + \mu\omega_{02}, \; \omega_{22} = \nu\omega_{01} + \rho\omega_{02},\\
&\omega_{33} = (2\nu + 1 - b)\omega_{01} + (2\mu - 1 - b)\omega_{02}, \; \omega_{31} = \omega_{32} = \sigma\omega_{01} + \tau\omega_{02},
\end{aligned} \tag{49}$$

unde $\lambda = \nu + b + 1$ şi $\rho = \mu - b - 1$.

Din ecuaţiile de structurii şi aceste relaţii obţinem

$$\begin{aligned}
&D\omega_{01} = (b+\mu)[\omega_{01}, \omega_{02}], \; D\omega_{02} = (b-\nu)[\omega_{01}, \omega_{02}],\\
&[db, \omega_{02}] + (b + \mu - b\nu + 1 + \sigma)[\omega_{01}, \omega_{02}] = 0,\\
&[db, \omega_{01}] + (b - \nu + b\mu + 1 + \tau)[\omega_{01}, \omega_{02}] = 0,\\
&[d\sigma, \omega_{01}] + [d\tau, \omega_{02}] + 2[\sigma(b+\mu) + \tau(b-\nu)][\omega_{01}, \omega_{02} = 0,\\
&[d\nu, \omega_{01}] + [b(\mu+\nu) + \tau - \sigma][\omega_{01}, \omega_{02}] = 0
\end{aligned} \tag{50}$$

şi ecuaţia finită

$$\mu + \nu = 2(\tau - \sigma). \tag{51}$$

De aici rezultă că cele două forme diferenţiale invariante ω_{01}, ω_{02} împreună cu invarianţii b, μ, σ, τ, legaţi prin condiţiile (50) şi (51) determină o suprafaţă cu o familie de linii Darboux axiale (neriglate) până la o transformare a grupului fundamental.

BIBLIOGRAFIE

1. Cruceanu V., *Asupra teoriei curbelor în spaţiul afin-axial parabolic.* An. Şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VI (1960), f. 3 supl., p. 627-641.