4 Asupra geometriei centro-afine a varietăţilor neolonome V_n^{n-1}

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
s. I-a, Mat., t. $\mathrm{XI_B}$, 1965, 453-464.

Cercetările prof. O. Mayer asupra geometriei centro-afine a suprafeţelor [2] şi extinderea acestora la cazul n-dimensional de către prof. V. Vagner [6] ne-au sugerat ideea studierii varietăţilor neolonome V_n^{n-1} [7] în spaţiul centro-afin C_n.

1. Fie în spaţiul centro-afin C_n de centru O şi hiperplan absolut Ω, o varietate neolonomă V_1^{n-1} obţinută alegând prin fiecare punct propriu $M(x) \in C_n$ câte un hiperplan necentral Π, numit *hiperplanul tangent varietăţii* V_n^{n-1} *în punctul* M. Analitic, varietatea V_n^{n-1} poate fi dată de un câmp de covectori $\underset{\rightarrow}{\xi}(x)$ care satisface relaţia de incidenţă

$$(1)\qquad \underset{\rightarrow}{\xi}\,\vec{x} = 1.$$

Ea poate fi dată de asemenea prin $n-1$ câmpuri de vectori $\vec{\lambda}_a(x)$, $(a, b, c... = 1, 2, ..., n-1)$, determinate până la o transformare de forma

$$(2)\qquad \vec{\lambda}_{a'} = A_{a'}^{a}\vec{\lambda}_a$$

cu

$$(3)\qquad \det(A_{a'}^{a}) \neq 0,$$

care satisfac condiţia

$$(4)\qquad \vec{\lambda}_1 \wedge \vec{\lambda}_2 \wedge ... \wedge \vec{\lambda}_{n-1} \wedge \vec{x} \neq 0.$$

Covectorul $\underset{\rightarrow}{\xi}$ este legat de vectorii $\vec{\lambda}_a$ prin condiţiile

$$(5)\qquad \underset{\rightarrow}{\xi}\,\vec{\lambda}_a = 0,$$

care exprimă faptul că vectorii $\overrightarrow{\lambda}_a(x)$ sunt paraleli cu hiperplanul tangent la V_n^{n-1} în punctul $M(x)$. 0dată cu varietatea V_n^{n-1} va trebui să considerăm şi varietatea complementară ei V_n^1, definită de snopul dreptelor centrale. Definind apoi $n-1$ câmpuri de covectori $\underset{\rightarrow}{\mu}{}^a(x)$ prin conditiile

$$(6) \qquad \underset{\rightarrow}{\mu}{}^a \overrightarrow{x} = 0, \ \underset{\rightarrow}{\mu}{}^a \overrightarrow{\lambda}_b = \delta_b^a,$$

ele sunt determinate până la o transformare de forma

$$(7) \qquad \underset{\rightarrow}{\mu}{}^{a'} = A_a^{a'} \underset{\rightarrow}{\mu}{}^a$$

unde $(A_a^{a'})$ este inversă matricei $(A_{a'}^a)$. Dacă facem notaţia

$$(8) \qquad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\lambda}_n, \quad \underset{\rightarrow}{\xi} = \underset{\rightarrow}{\mu}{}^n$$

pe care o vom folosi uneori, relaţiile (1), (5), (6) se pot scrie concis sub forma

$$(9) \qquad \underset{\rightarrow}{\mu}{}^a \overrightarrow{\lambda}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (\alpha, \beta, \gamma ... = 1, 2, ..., n)$$

şi ele exprimă faptul că reperul centro-afin $(O, \overrightarrow{\lambda}_a)$ are ca reciproc (dual) coreperul $(\Omega, \underset{\rightarrow}{\mu}{}^a)$. Din relaţiile (9) rezultă imediat între coordonate şi relaţiile

$$(9') \qquad \mu_i^\alpha \lambda_\alpha^j = \delta_i^j \quad (i, j, k ... = 1, 2, ..., n).$$

Pentru o deplasare arbitrară a punctului $M(x)$ putem pune

$$(10) \qquad d\overrightarrow{x} = \omega^\alpha \overrightarrow{\lambda}_\alpha$$

unde

$$(11) \qquad \omega^\alpha = \underset{\rightarrow}{\mu}{}^\alpha d\overrightarrow{x}.$$

Când punctul $M(x)$ se deplasează pe V_n^{n-1} avem

$$(12) \qquad \omega^n = \underset{\rightarrow}{\xi}\, d\overrightarrow{x} = 0$$

şi deci

$$(13) \qquad d\overrightarrow{x} = \omega^a \overrightarrow{\lambda}_a.$$

Pentru o funcţie arbitrară $F(x)$ de clasă C^m $(m \geq 2)$ vom avea

$$(14) \qquad dF = \partial_i F dx^i = \partial_i F \omega^\alpha \lambda_\alpha^i$$

şi punând

$$(15) \qquad \partial_a F = \partial_i F \lambda_a^i$$

deci

$$(15') \qquad \partial_i F = \partial_a F \mu_i^a,$$

rezultă

$$dF = \partial_a F \omega^a. \tag{16}$$

Pentru derivatele de ordinul doi ale funcţiei f obţinem formula de comutare

$$\partial_{[\alpha}\partial_{\beta]} F = W^{\gamma}_{\alpha\beta}\partial_{\gamma} F \tag{17}$$

unde

$$W^{\gamma}_{\alpha\beta} = \mu^{\gamma}_{i}\partial_{[\alpha}\lambda^{i}_{\beta]} = -\partial_{[\alpha}\mu^{\gamma}_{|i|}\lambda^{i}_{\beta]}. \tag{18}$$

Considerând vectorii derivaţi ai vectorilor reperului $(O, \vec{\lambda}_a)$ putem scrie pentru ei următoarele ecuaţii fundamentale

$$\begin{aligned} \partial_a \vec{x} &= \vec{\lambda}_a, \quad \partial_a \vec{\lambda}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{\lambda}_c + h^n_{ab}\vec{x}, \\ \partial_n \vec{x} &= \vec{x}, \quad \partial_n \vec{\lambda}_b = \Gamma^c_{nb}\vec{\lambda}_c + h^n_{nb}\vec{x}. \end{aligned} \tag{19}$$

Ţinind seama de relaţiile (8) pentru coeficienţii acestor ecuaţii obţinem următoarele expresii

$$\Gamma^c_{ab} = \underrightarrow{\mu}^c \partial_a \vec{\lambda}_b = -\partial_a \underrightarrow{\mu}^c \vec{\lambda}_b, \ \Gamma^c_{nb} = \underrightarrow{\mu}^c \partial_n \vec{\lambda}_b = -\partial_n \underrightarrow{\mu}^c \vec{\lambda}_b, \tag{20}$$

$$h^n_{ab} = \underrightarrow{\xi}\, \partial_a \vec{\lambda}_b = -\partial_a \underrightarrow{\xi}\, \vec{\lambda}_b, \ h^n_{nb} = \underrightarrow{\xi}\, \partial_n \vec{\lambda}_b = -\partial_n \underrightarrow{\xi}\, \vec{\lambda}_b. \tag{21}$$

Ei se transformă la o schimbare a vectorilor $\vec{\lambda}_a$ de forma (2), după următoarele legi

$$\Gamma^{c'}_{a'b'} = A^a_{a'}A^b_{b'}A^{c'}_c\Gamma^c_{ab} + \partial_{a'}A^e_{b'}A^{c'}_e, \ \Gamma^{c'}_{nb'} = A^b_{b'}A^{c'}_c\Gamma^c_{nb} + \partial_n A^e_{b'}A^{c'}_e, \tag{22}$$

$$h^n_{a'b'} = A^a_{a'}A^b_{b'}h^n_{ab}, \ h^n_{nb'} = A^b_{b'}h^n_{nb}. \tag{23}$$

Din relaţiile (22) rezultă că Γ^c_{ab} şi Γ^c_{nb} definesc două conexiuni afine pe V^{n-1}_n şi anume prima stabileşte corespondente afine între hiperplanele tangente la V^{n-1}_n pentru deplasări pe V^{n-1}_n iar a doua pentru deplasări pe V^1_n. Am putea considera că şi pe V^1_n avem două conexiuni afine ai căror coeficienţi sunt respectiv $\Gamma^n_{an} = 0$ şi $\Gamma^n_{nn} = 1$.

Din relaţiile (23) rezultă că h^n_{ab} şi h^n_{nb} sunt doi tensori pe V^{n-1}_n numiţi *tensori de curbură euleriană.* Primului îi vom mai spune tensorul asimptotic.

Pentru derivatele covariante ale unui tensor care are de exemplu forma T^n_{ab}, avem pentru deplasări pe V^{n-1}_n şi pe V^1_n respectiv formulele

$$\nabla_a T^n_{bc} = \partial_a T^n_{bc} - \Gamma^e_{ab}T^n_{ec} - \Gamma^e_{ac}T^n_{be} \tag{24}$$

şi

$$\nabla_n T^n_{bc} = \partial_n T^n_{bc} - \Gamma^e_{nb}T^n_{ec} - \Gamma^e_{nc}T^n_{be} + T^n_{bc}, \tag{25}$$

(deoarece $\Gamma^n_{nn} = 1$). Prin urmare ecuaţiile fundamentale (19), ţinând seamă că $\vec{x} = \vec{\lambda}_n$ se mai pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} \nabla_a \vec{x} &= \partial_a \vec{x} = \vec{\lambda}_a, \qquad \nabla_a \vec{\lambda}_b = \partial_a \vec{\lambda}_b - \Gamma^c_{ab}\vec{\lambda}_c = h^n_{ab}\vec{x}, \\ \nabla_n \vec{x} &= \partial_n \vec{x} - \vec{x} = 0, \quad \nabla_n \vec{\lambda}_b = \partial_n \vec{\lambda}_b - \Gamma^c_{nb}\vec{\lambda}_c = h^n_{nb}\vec{x}. \end{aligned} \tag{26}$$

Din ecuaţiile (26) din stânga obţinem, având în vedere (17) şi (26), condiţiile de integrabilitate

$$\begin{aligned}
&\nabla_{[a}\nabla_{b]}\vec{x} = (W^c_{ab} - \Gamma^c_{[ab]})\vec{\lambda}_c + W^n_{ab}\vec{x} = h^n_{[ab]}\vec{x},\\
(27)\qquad &\nabla_{[n}\nabla_{b]}\vec{x} = (W^c_{nb} - \frac{1}{2}\Gamma^c_{nb})\vec{\lambda}_c + W^n_{nb}\vec{x} = \frac{1}{2}(h^n_{nb}\vec{x} - \vec{\lambda}_b).
\end{aligned}$$

Ţinând seama de (9), aceste condiţii sunt eehivalente cu

$$(28)\qquad W^c_{ab} = \Gamma^c_{[ab]},\ W^n_{ab} = h^n_{[ab]},\ W^c_{nb} = \frac{1}{2}(\Gamma^c_{nb} - \delta^c_b),\ W^n_{nb} = \frac{1}{2}h^n_{nb}.$$

Ecuaţiile (26) din dreapta ne dau mai întâi

$$\begin{aligned}
&\nabla_{[a}\nabla_{b]}\vec{\lambda}_c = -\frac{1}{2}R^e_{abc}\vec{\lambda}_e + h^n_{[ab]}\nabla_n\vec{\lambda}_c,\\
(29)\qquad &\nabla_{[n}\nabla_{b]}\vec{\lambda}_c = -\frac{1}{2}R^e_{nbc}\vec{\lambda}_e - \frac{1}{2}\nabla_b\vec{\lambda}_c + \frac{1}{2}h^n_{nb}\nabla_n\vec{\lambda}_c \qquad .
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}R^e_{abc} = \partial_{[a}\Gamma^e_{b]c} + \Gamma^e_{[a|f|}\Gamma^f_{b]c} - W^\gamma_{ab}\Gamma^e_{\gamma c}\ \text{şi}\\
(30)\qquad &\frac{1}{2}R^e_{nbc} = \partial_{[n}\Gamma^e_{b]c} + \Gamma^e_{[n|f|}\Gamma^f_{b]c} - W^\gamma_{nb}\Gamma^e_{\gamma c}
\end{aligned}$$

sunt respectiv *primul şi al doilea tensor de curbură* ai varietăţii V^{n-1}_n.

Ecuaţiile (28) împreună cu (26) ne dau acum condiţiile de integrabilitate

$$\begin{aligned}
&\nabla_{[a}\nabla_{b]}\vec{\lambda}_c = -\frac{1}{2}R^e_{abc}\vec{\lambda}_e + h^n_{[ab]}h^n_{nc}\vec{x} = \nabla_{[a}h^n_{b]c}\vec{x} + \vec{\lambda}_{[a}h^n_{b]c},\\
(31)\qquad &\nabla_{[n}\nabla_{b]}\vec{\lambda}_c = -\frac{1}{2}R^e_{nbc}\vec{\lambda}_e - \frac{1}{2}(h^n_{bc} - h^n_{nb}h^n_{nc})\vec{x} = \nabla_{[n}h^n_{b]c}\vec{x} - \frac{1}{2}h^n_{nc}\vec{\lambda}_b,
\end{aligned}$$

echivalente cu

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}R^e_{abc} = \delta^e_{[a}h^n_{b]c},\ h^n_{[ab]}h^n_{nc} = \nabla_{[a}h^n_{b]c},\\
(32)\qquad &R^e_{nbc} = \delta^e_b h^n_{nc},\ \frac{1}{2}(h^n_{nb}h^n_{nc} - h^n_{bc}) = \nabla_{[n}h^n_{b]c}.
\end{aligned}$$

De aici rezultă apoi

$$\begin{aligned}
&R_{bc} = R^a_{abc} = -(n-2)h^n_{bc}, \qquad V_{ab} = R^c_{abc} = 2h^n_{[ab]},\\
(33)\qquad &R_{nc} = -R^b_{nbc} = -(n-1)h^n_{nc}, \quad V_{nc} = R^c_{nbc} = h^n_{nb}.
\end{aligned}$$

Condiţiile de integrabilitate a sistemului (26) sunt prin urmare condiţiile (27) şi (31) sau echivalentele lor (28) şi (32). Aplicând atunci teorema de existenţă şi unicitate sistemului (26) obţinem:

Teorema fundamentală. *Date conexiunile $\Gamma^c_{ab}(x)$ şi $\Gamma^c_{nb}(x)$ precum şi tensorii $h^n_{ab}(x), h^n_{nb}(x)$ de clasa C^m $(m \geq 1)$ care satisfac condiţiile de integrabilitate (28) şi (32), există în spaţiul centro-afin C_n o varietate neolonomă V^{n-1}_n deerminată până la o transformare centro-afină pentru care aceste obiecte să fie respectiv conexiunile afine şi tensorii de curbură euleriană.*

2. Fiecărui punct M din spaţiul C_n situat în domeniul de existenţă a varietăţii V_n^{n-1} putem să-i asociem prin intermediul acesteia o corespondenţă proiectivă între mulţimea dreptelor Δ prin el şi mulţimea hiperdreptelor $\overline{\Delta}$ (plane cu $n-2$ dimensiuni) situate în hiperplanul $\Pi(x)$ tangent varietăţii V_n^{n-1} în M, definită prin condiţia ca fiecărei drepte Δ să-i corespundă caracteristica $\overline{\Delta}$ a hiperplanului tangent la V_n^{n-1} pentru deplasarea în direcţia Δ. Această corespondenţă se numeşte polaritatea lui Pantazi [5].

Pentru a obţine ecuaţiile ei considerăm o dreaptă Δ prin M dată de

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x} + t\overrightarrow{u}, \tag{34}$$

unde

$$\overrightarrow{u} = u^a \overrightarrow{\lambda}_a \tag{35}$$

şi luăm un punct M' pe ea vecin cu M, de vector de poziţie

$$\overrightarrow{X'} = \overrightarrow{x} + dt\overrightarrow{u} + ...$$

Hiperplanul tangent în M' la V_n^{n-1} are ecuaţia

$$(\underset{\rightarrow}{\xi} + d\underset{\rightarrow}{\xi} + ...)(\overrightarrow{X} - (\overrightarrow{x} + dt\overrightarrow{u} + ...)) = 0$$

unde

$$d\underset{\rightarrow}{\xi} = \partial_a \underset{\rightarrow}{\xi}\, \omega^a = \partial_a \underset{\rightarrow}{\xi}\, u^a dt.$$

Un punct M^* din hiperplanul tangent $\Pi(x)$, dat de vectorul

$$\overrightarrow{X^*} = \overrightarrow{x} + v^a \overrightarrow{\lambda}_a \tag{36}$$

aparţine hiperplanului tangent în M' dacă şi numai dacă satisface condiţia

$$(-\underset{\rightarrow}{\xi}\, \overrightarrow{u} + \partial_a \underset{\rightarrow}{\xi}\, \overrightarrow{\lambda}_b u^a v^b)dt + ... = 0.$$

Impărţind această ecuaţie cu dt şi făcând apoi dt să tindă la zero, obţinem, ţinând seama de (20) şi (21), ecuaţia

$$h_{ab}^n u^a v^b + u^n = 0. \tag{37}$$

Ea reprezintă în hiperplanul tangent $\Pi(x)$ tocmai hiperdreapta $\overline{\Delta}$ corespunzătoare dreptei Δ în polaritatea lui Pantazi. Scriind ecuaţia unei hiperdrepte din planul tangent la V_n^{n-1} sub forma

$$p_b v^b + p_n = 0 \tag{38}$$

obţinem, comparând cu (37), pentru polaritatea lui Pantazi, ecuaţiile

$$\rho p_b = h_{ab}^n u^a, \ \rho p_n = u^n. \tag{39}$$

Dacă dreapta Δ aparţine hiperplanului tangent la V_n^{n-1}, deci

$$u^n = 0,$$

din ecuaţiile (39) rezultă

$$p_n = 0,$$

adică şi hiperdreapta corespunzătoare ei trece tot prin M. Prin urmare polaritatea lui Pantazi induce o proiectivitate între mulţimile dreptelor şi hiperdreptelor tangente la V_n^{n-1} în M, dată de ecuaţiile

$$\rho p_b = h_{ab}^n u^a. \tag{40}$$

Hiperdreapta $\overline{\Delta}$ corespunzătoare dreptei Δ în această proiectivitate se mai numeşte şi *unilateral conjugată dreptei* Δ.

O dreaptă Δ care are proprietatea că aparţine hiperdreptei $\overline{\Delta}$ unilateral cunjugată ei se numeşte *tangenta asimptotică* a varietăţii V_n^{n-1}.

Tangentele asimptotice satisfac deci condiţia

$$h_{ab}^n u^a u^b = 0. \tag{41}$$

O curbă a varietăţii, tangenta în fiecare punct la o asimptotică, se numeşte *linie asimptotică*.

Liniile asimptotice ale varietăţii satisfac deci sistemul

$$\omega^n = 0, \; h_{ab}^n \omega^a \omega^b = 0. \tag{42}$$

In cele ce urmează vom exclude varietăţile parabolice, adică vom presupune

$$\det(h_{ab}^n) \neq 0. \tag{43}$$

Hiperdreapta, corespunzătoare în polaritatea lui Pantazi dreptei prin centrul OM o vom numi hipernormala centro-proiectivă a varietăţii. Ea are în hiperplanul tangent ecuaţia

$$h_{na}^n v^a + 1 = 0. \tag{44}$$

Dreapta corespunzătoare în polaritatea lui Pantazi hiperdreptei absolute $\Omega\Pi$ o vom numi *normala afină a varietăţii.* Parametrii ei directori u^a, verifică sistemul

$$h_{ab}^n u^a = 0. \tag{45}$$

Considerând tensorul h^{abn} reciprocul lui h_{ab}^n, definit de ecuaţiile

$$h_{ab}^n h^{acn} = \delta_b^c \text{ sau } h_{ab}^n h^{cbn} = \delta_a^c \tag{46}$$

şi introducând tensorul

$$h_n^{an} = h_{nb}^n h^{abn}, \tag{47}$$

din ecuaţiile (45) obţinem

$$u^a = -h_n^{an} u^n. \tag{48}$$

Prin urmare, ecuaţia normalei afine este

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x} + t(\overrightarrow{x} - h_n^{an} \overrightarrow{\lambda}_a). \tag{49}$$

Planul determinat de normala afina prin M şi centrul spaţiului se numeşte *planul canonic.* El taie hiperplanul tangent în M după o dreaptă numită *tangenta canonică* a cărei direcţie este dată de

$$u^a = h_n^{an}, \; u^n = 0. \tag{50}$$

Hipertangenta unilateral conjugată ei o numim *hipertangenta canonică* şi ea are în hiperplanul tangent ecuaţia

$$h_a u^a = 0. \tag{51}$$

De aici rezultă că hipertangenta canonică este paralela cu hipernormala centro-proiectivă.

Considerând invariantul

$$h = h^n_{na} h^{an}_n = h^n_{ab} h^{an}_n h^{bn}_n \tag{52}$$

obţinem pentru el următoarea interpretare geometrică

$$h = \frac{OP}{QP} \tag{53}$$

unde P şi Q sunt respectiv punctele de pe normala afină şi hipernormala centro-proiectivă coliniare cu centrul O al spaţiului.

3. Punând

$$\underset{\rightarrow}{\xi}_a = \partial_a \underset{\rightarrow}{\xi} = -h_{ab} \underset{\rightarrow}{\mu}^b \tag{54}$$

pentru derivatele covectorilor $\underset{\rightarrow}{\xi}$ şi $\underset{\rightarrow}{\xi}_a$ obţinem ecuaţiile

$$\begin{aligned} &\partial_a \underset{\rightarrow}{\xi} = \underset{\rightarrow}{\xi}_a, \ \partial_a \underset{\rightarrow}{\xi}_b = \overline{\Gamma}^c_{ab} \underset{\rightarrow}{\xi}_c + h^n_{ab} \underset{\rightarrow}{\xi}, \\ &\partial_n \underset{\rightarrow}{\xi} = h^{cn}_n \underset{\rightarrow}{\xi}_c - \underset{\rightarrow}{\xi}, \ \partial_n \underset{\rightarrow}{\xi}_b = \overline{\Gamma}^c_{nb} \underset{\rightarrow}{\xi}_c, \end{aligned} \tag{55}$$

unde

$$\overline{\Gamma}^c_{ab} = -\partial_a \underset{\rightarrow}{\xi}_b \overrightarrow{\lambda}_e h^{cen}, \ \overline{\Gamma}^b_{na} = -\partial_n \underset{\rightarrow}{\xi}_b h^{cen}. \tag{56}$$

Se constată că $\overline{\Gamma}^c_{ab}$ şi $\overline{\Gamma}^b_{na}$ sunt conexiuni afine pe V^{n-1}_n transformându-se la schimbarea (2) după legile (22). De altfel pentru ele obţinem expresiile

$$\overline{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} + h^{cen} \nabla_a h^n_{be}, \ \overline{\Gamma}^c_{nb} = \Gamma^c_{nb} + h^{cen} \nabla_n h^n_{be} - \delta^c_b. \tag{57}$$

Aceste relaţii pot fi scrise respectiv sub forma

$$\begin{aligned} &\nabla_a h^n_{(b)c} = \partial_a h^n_{bc} - \overline{\Gamma}^e_{ab} h^n_{ec} - \Gamma^e_{ac} h^n_{be} = 0, \\ &\nabla_a h^n_{(b)c} = \partial_n h^n_{bc} - \overline{\Gamma}^e_{nb} h^n_{ec} - \Gamma^e_{nc} h^n_{be} + h^n_{be} = 0 \end{aligned} \tag{58}$$

de unde rezultă că conexiunile $\overline{\Gamma}^c_{ab}$, $\overline{\Gamma}^b_{nb}$ sunt conjugate în sensul lui Norden [4], respectiv conexiunilor Γ^c_{ab}, Γ^b_{nb}.

Pentru relaţiile (57) sau (58) putem obţine şi o altă interpretare geometrică.

Considerăm izomorfismul între spaţiul tangent la V^{n-1}_n şi dualul său, definit de ecuaţiile

$$u^n_b = h^n_{ab} v^b. \tag{59}$$

Putem scrie atunci

$$\overline{\nabla}_a u_b^n = \nabla_a h_{(b)c}^n v^c + \nabla_a v^c h_{bc}^n, \tag{60}$$
$$\overline{\nabla}_n u_b^n = \nabla_n h_{(b)c}^n v^c + \nabla_n v^c h_{bc}^n$$

de unde rezultă

Teorema 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca transportul paralel al vectorilor covarianţi în conexiunea* $\overline{\Gamma}_{ab}^c$ ($\overline{\Gamma}_{nb}^b$) *şi al vectorilor contravarianţi în conexiunea* Γ_{ab}^c (Γ_{nb}^b) *să păstreze izomorfismul* (59) *este ca cele două conexiuni să satisfacă condiţiile* (58).

4. Unui câmp de vectori $v^a(t)$ pe V_n^{n-1} definit de-a lungul unei curbe $C \subset V_n^{n-1}$ dată de ecuaţia

$$\vec{x} = \vec{x}(t), \tag{61}$$

putem să-i asociem un câmp de vectori şi unul de covectori în spaţiul C_n prin relaţiile

$$\vec{v} = v^a \vec{\lambda}_a, \tag{62}$$
$$\underset{\rightarrow}{w} = v^a \underset{\rightarrow}{\xi}_a.$$

De aici, ţinând seama de ecuaţiile fundamentale (26) şi (55) putem scrie

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\nabla v^a}{dt} \vec{\lambda}_a + h_{cb}^n \frac{\omega^c}{dt} v^b \vec{x}, \tag{63}$$
$$\frac{d\underset{\rightarrow}{w}}{dt} = \frac{\overline{\nabla} v_a}{dt} \underset{\rightarrow}{\xi}_a + h_{bc}^n \frac{\omega_c}{dt} v^b \underset{\rightarrow}{\xi}$$

de unde rezultă

Teorema 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca direcţiile* $v^a(t)$ *să fie paralele de-a lungul curbei* C *în conexiunea* Γ_{ab}^e *este*

$$\vec{x} \wedge \vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = 0. \tag{64}$$

Teorema 4. *Condiţia necesară şi suficientă ca direcţiile* $v^a(t)$ *să fie paralele de-a lungul curbei* C *în conexiunea* $\overline{\Gamma}_{ab}^e$ *este*

$$\underset{\rightarrow}{\xi} \wedge \underset{\rightarrow}{w} \wedge \frac{d\underset{\rightarrow}{w}}{dt} = 0. \tag{65}$$

Considerând acum

$$v^a = w^a,$$

avem mai întâi

$$d\vec{x} = \omega^a \vec{\lambda}_a, \; d\underset{\rightarrow}{\xi} = \omega^a \underset{\rightarrow}{\xi}_a$$

şi apoi

$$
(66)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} &= \frac{\nabla\omega^a}{dt}\,\vec{\lambda}_a + h^n_{bc}\,\frac{\omega^b}{dt}\,\frac{\omega^c}{dt}\,\vec{x},\\
\frac{d^2\underset{\rightarrow}{\xi}}{dt^2} &= \frac{\overline{\nabla}\omega^a}{dt}\,\underset{\rightarrow}{\xi}_a + h^n_{bc}\,\frac{\omega^b}{dt}\,\frac{\omega^c}{dt}\,\underset{\rightarrow}{\xi}.
\end{aligned}
$$

De aici rezultă

Teorema 5. *Condiţia necesară şi suficientă ca curba* $C\subset V_n^{n-1}$ *să fie geodezică în conexiunea* Γ^c_{ab} *este*

$$
(67)\qquad \vec{x}\wedge\frac{d\vec{x}}{dt}\wedge\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=0.
$$

Teorema 6. *Condiţia necesară şi suficientă ca curba* $C\subset V_n^{n-1}$ *să fie geodezică în conexiunea* $\overline{\Gamma}^c_{ab}$ *este*

$$
(68)\qquad \underset{\rightarrow}{\xi}\wedge\frac{d\underset{\rightarrow}{\xi}}{dt}\wedge\frac{d^2\underset{\rightarrow}{\xi}}{dt^2}=0.
$$

Din relaţiile (67) şi (68) rezultă că geodezicele în conexiunea Γ^c_{ab} sunt curbele varietăţii, situate în plane centrale (secţiunile prin plane centrale) iar geodezicele în conexiunea $\overline{\Gamma}^c_{ab}$ sunt curbele varietăţii, situate pe hipercilindrii tangenţi acesteia (curbele hipercilindrice).

5. Printre varietăţile V_n^{n-1} particulare remarcăm:

a) *Varietăţile pentru care* $h^n_{[ab]}=0$. Ele sunt varietăţi olonome, adică familii uniparametrice de hipersuprafeţe. In adevăr condiţia ca V_n^{n-1} să fie olonomă este

$$
\omega^n\wedge D\omega^n=0,
$$

unde prin D am notat simbolul diferenţierii exterioare. Dar

$$
\omega^n\wedge D\omega^n=-\frac{1}{2}\,w^n_{ab}=-h^n_{[ab]}
$$

şi deci V_n^{n-1} este olonomă dacă şi numai dacă tensorul h^n_{ab} este simetric.

b) *Varietăţile pentru care* $h^n_{(ab)}=0$. Ele se caracterizează prin una din proprietăţile:

- sunt total geodezice în raport cu conexiunea Γ^c_{ab};
- sunt total geodezice în raport cu conexiunea $\overline{\Gamma}^c_{ab}$;
- au liniile asimptotice nedeterminate.

c) *Varietăţile pentru care* $h^n_{ab}=0$. Ele sunt familii uniparametrice de hiperplane şi sunt varietăţile comune celor doua clase precedente. Se mai caracterizează prin proprietatea că:

- primul tensor de curbura este nul, $R^e_{abc}=0$.

d) *Varietăţile pentru care* $h^n_{na} = 0$. Acestea sunt varietăţi Ţiţeica [1], [3] relative la centrul O şi hiperplanul Ω şi excluzând varietăţile parabolice obţinem pentru ele şi următoarele proprietăţi caracteristice:

- hipernormala centro-proiectivă aparţine hiperplanului absolut Ω;
- al doilea tensor de curbură este nul, $R^e_{nbc} = 0$;
- vectorul $h^n_{na} = 0$;
- normala afină trece prin centrul O al spaţiului C_n;
- hiperplanele tangente de-a lungul unei drepte centrale sunt paralele.

Varietăţile Ţiţeica eliptice (adică pentru care forma patratică $h_{ab}\omega^a\omega^b$ este definită) se mai caracterizează şi prin proprietatea că:

- invariantul $h = 0$.

Observăm deci că o clasă mai generală decât a varietăţilor Ţiţeica de centru O şi hiperplan Ω este constituită de varietăţile pentru care $h =$ constant.

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghiu Gh.Th., *Asupra varietăţilor neolonome.* Lucrările Ştiinţifice ale Institutului pedagogic Timişoara, 1961, p. 59-87.
2. Mayer O., *Géométrie centro-affine différentielle des surfaces.* Ann. sci. Univ. Jassy, 21, (1934-1935), p. 1-37.
3. Mihăilescu T., *Varietăţi neolonome de tip Ţiţeica-Wilczinski.* Stud. şi cerc. şt., Mat., Acad. R.S. Romania vol. 6., 1955, p. 175-192.
4. Norden A., *Über Paare konjugierter Übertragungen.* Trudy seminara po vectoriomu i tenzornomu analizu, vyp. 4, 1937. p. 205-255.
5. Pantazi A., *Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces.* Mathematica, vol. 7, 1923, p. 70-88.
6. Vagner V.V., *Gheometrija Finslera kak teorija polia lokalnyh ghiperpoverhnostei,* Trudy seminara po vectornomu i tenzornomu analizu, 7, 1949, 55-166.
7. Vrănceanu Gh., *Les espaces non-holonomes.* Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 76, Paris 1926.