3 Sur les espaces à connexion centro-affine.

C. R. Acad. Sc. Paris,
t. 260 p. 6272-6274 (14 juin 1965).

1. Soit V_n une variété différentiable de classe C^∞ et ξ une section sur l'espace fibre $T(V_n)$ des vecteurs tangents à V_n. La section ξ nous permet alors de définir sur l'espace vectoriel tangent T_M en chaque point M de V_n une structure d'espace centro-affine avec le centre dans le point O déterminé par la condition $\overrightarrow{MO} = -\xi$ et nommé le *centre local.* Les repères affines (O, R), où $R = (\overrightarrow{E}_\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma, ... = 1, 2, ..., n)$ seront nommés les repères centro-affines relatifs au point M, *associés à la section* ξ. L'ensemble $C(\xi, V_n)$ de tous les repères centro-affines relatifs aux divers points M de V_n peut être organisé comme un espace fibré principal de base V_n, nommé l'*espace fibré principal des repères centro-affines associé à la section* ξ sur $T(V_n)$. Le groupe structural de cet espace fibré sera le groupe centro-affine de l'espace à n dimensions.

Nous appelons connexion centro-affine sur V_n une connexion infinitésimale sur l'espace fibré principal $C(\xi, V_n)$ associé à une section ξ sur $T(Vn)$.

Etant donné un recouvrement de V_n par des voisinages ouverts U, munis de sections locales sur $C(\xi, V_n)$, une connexion centro-affine sur V_n associée à la section ξ, peut être définie en donnant en chaque voisinage U une 1-forme différentielle ω_U à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe centro-affine. Cette forme sera representée localement par une matrice $n \times n$

$$\omega_U = (\omega^\alpha_\beta) \tag{1}$$

dont les éléments sont des 1-formes différentielles sur U. Lorsque $M \in U \cap V$ et

$$R^M_V = R^V_U A^U_V, \tag{2}$$

la condition de cohérence

$$\omega_V = A^{-1U}_V \omega_U A^U_V + A^V_U dA^U_V \tag{3}$$

doit être satisfaite.

2. Dans le recouvrement donné sur V_n, faisons correspondre aux sections locales sur $C(\xi, V_n)$ les sections locales sur l'espace fibré principal $E(V_n)$ des repères linéaires, définis par les repères formés avec les mêmes vecteurs $\overrightarrow{E}_\alpha$. Alors à la connexion centro-affine considerée sur V_n nous pouvons associer d'une manière naturelle la connexion linéaire sur V_n donnée par la 1-forme

$$\pi_U = \omega_U. \tag{4}$$

Cette connexion linéaire ne dépend pas du recouvrement donné et nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Une connexion centro-affine sur V_n est uniquement determinée par la donnée d'un champ de vecteurs contravariants ξ et d'une connexion linéaire ω sur V_n.

3. A une connexion centro-affine (ξ, ω) sur V_n nous pouvons associer d'une manière naturelle une connexion affine sur V_n au sens de Lichnerowicz [1]. Elle peut être définie dans le recouvrement donné par la connexion linéaire ω et la 1-forme vectorielle, contravariante caractéristique [2] $\Phi = \nabla\xi$ où ∇ est le symbole de la différentiation absolue relative à ω.

Une connexion affine associée d'une manière naturelle à une connexion centro-affine sur V_n peut être caractérisée par l'une des propriétés suivantes:

a. Elle admet un champ de points O dans les espaces tangents à V_n qui sont absolument correspondants dans la connexion.

b. Il existe sur V_n un champ de vecteurs contravariants $\overrightarrow{MO} = -\xi$ absolument concourants dans la connexion, au sens de A. Myller [3].

c. Le groupe d'holonomie non-homogène $\Phi(V_n)$ conserve un point O de l'espace tangent à V_n.

4. Considérons le développement d'un espace à connexion centro-affine V_n le long d'une courbe Γ de V_n sur l'espace centro-affine tangent dans un point $M_0 \in \Gamma$. Les repères centro-affines (O, R) des sections sur $C(\xi, V_n)$ seront représentés par les repères centro-affines (O, r) avec $r = (\vec{e}_\alpha)$, de l'espace tangent, qui satisfont aux equations de mouvement:

$$\overrightarrow{dO} = 0, \; dr = rd\omega_R(dR). \tag{5}$$

La courbe Γ et les repères linéaires correspondants (M, R) seront représentés respectivement par une courbe γ et une famille de repères (m, r) satisfaisant aux equations de mouvement

$$\overrightarrow{dm} = r\nabla\xi_R(dR), \; dr = r\omega_R(dR). \tag{6}$$

Pour que les vecteurs tangents à Γ et γ en M_0 coincident il faut et il suffit que

$$\nabla\xi = \theta, \tag{7}$$

où $\theta = (\theta^\alpha)$ est la 1-forme du corepère dual du repère R.

Nous appelons une connexion centro-affine qui satisfait à la condition (7) sur toute V_n, *connexion centro-affine normale.* En coordonnées locales, une connexion centro-affine normale sur V_n se caractérise par la condition

$$\nabla_\beta \xi^\alpha = \delta^\alpha_\beta. \tag{8}$$

Une courbe Γ de l'espace à connexion centro-affine sera une *géodésique centrale ou non-centrale* si elle se développe sur l'espace centro-affine tangent dans un de ses points M_0, sur un segment de droite centrale ou non-centrale. En utilisant un paramètre affine, les géodésiques centrales seront données par

$$\frac{\nabla \xi^\alpha}{ds} = \xi^\alpha \tag{9}$$

et les géodésiques non-centrales par

$$\frac{\nabla^2 \xi^\alpha}{ds^2} = 0. \tag{10}$$

En particulier, si l'espace V_n est à connexion centro-affine normale, les géodésiques centrales seront les trajectoires du champ de vecteurs ξ.

5. La 2-forme de torsion pour une connexion centro-affine étant donnée en coordonnées locales par

$$T^\alpha = d(\nabla \xi^\alpha) + \omega^\alpha{}_\beta \wedge \nabla \xi^\beta \tag{11}$$

nous obtiendrons pour le tenseur de torsion l'expression

$$2T^\alpha{}_{\gamma\delta} = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\xi^\beta. \tag{12}$$

On en obtient à l'aide de (8) les résultats suivants:

- Un espace à connexion centro-affine sans courbure est localement affine ($T^\alpha{}_{\gamma\delta}$=0, $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$=0).
- Un espace à connexion centro-affine normale est symétrique ($\nabla_\varepsilon T^\alpha{}_{\gamma\delta}$=0, $\nabla_\varepsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 0$) seulement s'il est localement affine.
- Un espace à connexion centro-affine normale est un espace de Ricci ($\nabla_\varepsilon T_\gamma = 0$, $\nabla_\varepsilon R_{\beta\gamma} = 0$) seulement s'il est Ricci special ($T_\gamma = 0$, $R_{\beta\gamma} = 0$).

6. Par des considérations duales nous pouvons introduire *les espaces à connexion cocentro-affine* et l'on obtient des résultats analogues. Par exemple, une connexion cocentro-affine sur V_n sera définie par une connexion linéaire ω et un champ de vecteurs covariants η sur V_n. A une telle connexion on peut associer d'une manière naturelle une connexion coaffine (4) determinée par la même connexion linéaire ω et la 1-forme covariante caractéristique $g = \nabla\eta$.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.* Ed. Cremonese, Roma 1955, p. 146.
2. I. Cattaneo-Gasparini, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 10, 1956, p. 119.
3. A. Myller, Bull. Soc. Math. Fr., 56, 1928, p. 1-6.
4. F. Maurer-Tison, Comptes rendus, 246, 1958, p. 240.