5 Sur la théorie des variétés plongées dans un espace à connexion métrique projective

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
s.I-a, Mat. XII, 1966, f.1, 159-173.

Introduction. Par un *espace à connexion métrique projective* nous entendons un espace à connexion projective qui admet un champ de hyperquadriques conservé par la connexion ou, cequi est la même chose, par le groupe d'holonomie. Ces espaces ont été introduits par E. Cartan [2] et étudiés en détail par O. Veblen [8], J.A. Schouten [7] et autres, en liaison avec les théories relativistes unitaires projectives, et puis par E. Bortolotti et V. Hlavaty [1]. Leur étude a été reprise par, S. Sasaki et K. Yano [5], Gh. Vrănceanu [9] et plus récemment par S. Sato [6].

Dans ce travail nous reprenons l'étude de ces espaces quand la connexion est symétrique et les hyperquadriques sont non-dégénérèes et ne contiennent pas les points de contact des espaces tangents avec la variété à connexion. On déduit par une voie simple et unitaire une série de resultats connus et on dévellope ensuite la théorie des variétés plongées dans les espaces à connexion métrique projective.

Espaces à connexion métrique projective. Considérons une variété différentiable V_n et douons l'espace tangent en chaque point x de V_n avec la structure d'espace projectif. Dans chacun des espaces tangents on donne une hyperquadrique non-dégénérée qui ne contient pas le point x de V_n. Nous considérons encore sur V_n une connexion projective et prenons comme repères préférentiels les repères projectifs $(A_0 A_1 ... A_n)$ qui satisfont aux conditions suivantes:

a) A_0 coïncide avec le point x de contact de V_n avec l'espace tangent;

b) A_i $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$ sont les points où les tangentes aux lignes de coordonnèes coupent l'hyperplan polaire de x par rapport à l'hyperquadrique du champ;

c) Les points A_α $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, ..., n)$ sont normés par la condition que le déplacement de A_0 soit donné par l'expression

$$dA_0 = p_k dx^k A_0 + dx^i A_i. \tag{1}$$

Il reste alors seulement la possibilité de changer la normation des points A^α en les multipliant par le même facteur λ,

$$\overline{A}_\alpha = \lambda A_\alpha. \tag{2}$$

En posant encore

$$dA_j = \gamma_{kj}^0 dx^k A_0 + \gamma_{kj}^i dx^k A_i, \tag{3}$$

on voit qu'au changement (2) p_k et γ_{kj}^α se transforment d'après la loi

$$\bar{p}_k = p_k + \partial_k \log \lambda, \ \bar{\gamma}_{kj}^0 = \gamma_{kj}^0, \ \bar{\gamma}_{kj}^i = \gamma_{kj}^i + \delta_j^i \partial_k \log \lambda. \tag{4}$$

Avec la notation

$$\gamma_{k0}^\alpha = \delta_k^\alpha + \delta_0^\alpha p_k, \tag{5}$$

on constate que les quantités

$$\Gamma_{k\beta}^\alpha = \gamma_{k\beta}^\alpha - \delta_\beta^\alpha p_k, \tag{6}$$

nommées les paramètres de la connexion projective, sont invariantes au changement (2).

A une transformation regulière de coordonnèes sur V_n, p_k et Γ_{kj}^0 se transforment respectivement comme un covecteur affine et un tenseur covariant affine du deuxième ordre et Γ_{kj}^i comme les paramètres d'une connexion affine.

Considérons le champ d'hyperquadriques donné par les équations

$$G_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0 \ (G_{00} \neq 0, \ \det \|G_{\alpha\beta}\| \neq 0) \tag{7}$$

et posons

$$g_{\alpha\beta} = c \, \frac{G_{\alpha\beta}}{G_{00}} \tag{8}$$

où $c \neq 0$ est une constante arbitraire. On en déduit d'après les conditions a) et b)

$$g_{00} = c, \ g_{0i} = 0, \ g_{ij} = c \, \frac{G_{ij}}{G_{00}}. \tag{9}$$

Les quantités g_{ij}, invariantes au changement (2), se transforment à un changement de coordonnèes sur V_n comme les composantes d'un tenseur affine covariant.

En vertu de a), les équations (7) du champ d'hyperquadriques prennent la forme

$$c(X^0)^2 + g_{ij} X^i X^j = 0 \ (c \neq 0, \ \det \|g_{ij}\| \neq 0). \tag{10}$$

Soit C une courbe différentiable de V_n définie paramétriquement par les équations

$$x^i = x^i(t) \tag{11}$$

et un champ différentiable de points dans les espaces tangents à V_n le long de C, donné par

$$X^\alpha = X^\alpha(t). \tag{12}$$

Les points de ce champ sont correspondants relativement à C et à la connexion projective donnée sur V_n si leurs coordonnèes satisfont au système différentiel

$$\frac{DX^\alpha}{dt} = \frac{dX^\alpha}{dt} + \Gamma_{k\beta}^\alpha \, \frac{dx^k}{dt} \, X^\beta = \rho X^\alpha. \tag{13}$$

Par D nous avons noté le symbole de la différentiation absolue relativement à la connexion projective $\Gamma^\alpha_{k\beta}$.

Les hyperquadriques du champ (10) sont correspondantes dans la connexion projective $\Gamma^\alpha_{k\beta}$ le long de C si la condition

$$\frac{d}{dt}\left(g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta\right) = 0 \tag{14}$$

est verifiée pour tous les champs de points $X^\alpha(t)$ qui satisfont à (10) et (13).

Par suite, nous devons avoir

$$\frac{Dg_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{dg_{\alpha\beta}}{dt} - \Gamma^\gamma_{k\alpha}\frac{dx^k}{dt}g_{\gamma\beta} - \Gamma^\gamma_{k\beta}\frac{dx^k}{dt}g_{\alpha\gamma} = \tau_k\frac{dx^k}{dt}g_{\alpha\beta}. \tag{15}$$

On en déduit que la conuexion projective conserve le champ d'hyperquadriques (10) si le tenseur $g_{\alpha\beta}$ et les paramètres $\Gamma^\alpha_{k\beta}$ de la connexion sont liés par les conditions

$$D_k g_{\alpha\beta} = \partial_k g_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{k\alpha}g_{\gamma\beta} - \Gamma^\gamma_{k\beta}g_{\alpha\gamma} = \tau_k g_{\alpha\beta}. \tag{16}$$

D'après d) et a) il en résulte pour $\alpha = \beta = 0$

$$\tau_k = 0$$

et par suite les équations (16) prennent la forme

$$D_k g_{\alpha\beta} = 0. \tag{17}$$

On en déduit pour $\alpha = 0,\ \beta = j$

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{c}\,g_{ij} \tag{18}$$

et pour $\alpha = i,\ \beta = j$

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^\ell_{ki}g_{\ell j} - \Gamma^\ell_{kj}g_{i\ell} = 0, \tag{19}$$

où ∇ est le symbole de la différentiation absolue relativement à la connexion affine Γ^i_{kj}.

En supposant la connexion projective symétrique, on obtient de (9)

$$\Gamma^i_{kj} = \left\{ {i \atop k\ j} \right\}_g \tag{20}$$

c' est-à-dire les paramètres Γ^i_{kj} coïncident avec les symboles de Christoffel pour le tenseur g_{ij}.

Nous avons donc

Théorème 1. *Etant donné un champ d'hyperquadriques sur V_n par les équations* (10) *il existe une connexion projective de paramètres:*

$$\Gamma^\alpha_{k0} = \delta^\alpha_k,\ \Gamma^0_{kj} = -\frac{1}{c}\,g_{kj},\ \Gamma^i_{kj} = \left\{ {i \atop k\ j} \right\}_g \tag{21}$$

qui conserve le champ de ces hyperquadriques [1].

Nous avons obtenu aussi le résultat

Théorème 2. *A la connexion métrique projective conservant le champ d'hyperquadriques* (10) *on peut associer une connexion riemannienne définie par le tenseur g_{ij}. Réciproquement, étant donnée sur V_n une connexion riemannienne par le tenseur g_{ij} et une constante $c \neq 0$, les relations* (21) *nous donnent les paramètres d'une connexion métrique projective qui conserve le champ d'hyperquadriques* (10) [1].

Nous appellerons la polarité définie par une hyperquadrique (10) *polarité absolue* et la connexion riemannienne définie par g_{ij}, *associèe* à la connexion métrique projective (21) qui conserve le champ d'hyperquadriques (10).

Une courbe $C \subset V_n$ est géodésique pour la connexion projective $\Gamma^{\alpha}_{k\beta}$ seulement si elle satisfait aux équations

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,\frac{dx^k}{dt} = \rho\,\frac{dx^i}{dt} \tag{22}$$

et par suite, d'après (21), il en résulte

Théorème 3. *Les géodésiques d'une connexion métrique projective coïncident avec les géodésiques de la connexion riemannienne associée.*

En ecrivant les équations (1) et (3) sous la forme

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta \tag{23}$$

et en posant

$$\Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma,\ \Omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \Omega^0_0 = R_i{}^\alpha{}_{j\beta} dx^i \wedge dx^j, \tag{24}$$

nous obtenons, d'après (21), pour les composantes du tenseur de courbure et torsion $R_i{}^\beta{}_{j\alpha}$, les expressions

$$R^\beta_{ij0} = 0,\ R^0_{ijk} = 0,\ R^h_{ijk} = \Gamma^h_{ijk} - \frac{1}{c}\,\delta^h_{[i} g_{j]k}, \tag{25}$$

où

$$\Gamma^h_{ijk} = \partial_{[i}\Gamma^h_{j]k} + \Gamma^h_{[i|\ell|}\Gamma^\ell_{j]k} \tag{26}$$

est le tenseur de courbure pour la connexion riemannienne associée. Le tenseur affine R^h_{ijk} sera appelé le *tenseur de courbure* de la connexion métrique projective.

En supposant la connexion projective (21) normale, c'est-à-dire

$$R_{jk} = R^i_{ijk} = 0, \tag{27}$$

d'après (25) il vient

$$\Gamma_{jk} = \Gamma^i_{ijk} = \frac{n-1}{2c}\,g_{jk} \tag{28}$$

et par suite

Théorème 4. *Si la connexion métrique projective qui conserve le champ d'hyperquadriques* (10) *est normale, alors la connexion riemannienne associée est de type Einstein. Réciproquement, étant donné un espace d'Einstein de tenseur métrique g_{ij} et courbure scalaire $k \neq 0$, en posant*

$$c = \frac{n(n-1)}{2k}, \tag{29}$$

les équations (21) *donnent les paramètres d'une connexion métrique projective normale qui conserve le champ d'hyperquadriques* (10) [5], [9].

En supposant que la connexion projective (21) est projective euclidienne, c'est-à-dire

$$R_i{}^h{}_{jk} = 0, \tag{30}$$

alors, d'après (25) il vient

$$\Gamma_i{}^h{}_{jk} = \frac{1}{c}\, \delta^h_{[i} g_{j]k} \tag{31}$$

et nous obtenons le théorème suivant:

Théorème 5. *Si la connexion métrique projoective qui conserve le champ d'hyperquadriques* (10) *est projective euclidienne, alors la connexion riemannienne associée est de courbure constante. Réciproquement, étant donnée sur V_m une connexion riemannienne de tenseur métrique g_{ij} et courbure constante $K \neq 0$, en posant*

$$c = \frac{1}{K} \tag{32}$$

les équations (21) *nous donnent les paramètres d'une connexion métrique projective qui est projective euclidienne* [1], [6].

Les géodésiques de la connexion métrique projective et de la connexion riemannienne associée, étant les mêmes, les deux connexions sont simultanément projectives euclidiennes et par suite nous avons

Théorème 6. *Une connexion riemannienne projective euclidienne est de courbure constante et réciproquement toute cannexion riemanniene de courbure constante est projective euclidienne* [10].

Variétés plongées dans un espace à connexion métrique projective. Considérons dans l'espace V_n à connexion métrique (21), une variété V_m, donnée par les équations

$$x^i = x^i(u^a), \quad (a, b, c = 1, 2, ..., m), \tag{33}$$

dans lesquelles les fonctions $x^i(u^a)$ sont regulières de la classe nécessaire et satisfont à la condition

$$\operatorname{rang} \|x^i_a\| = m \tag{34}$$

où

$$x^i_a = \partial_a x^i. \tag{35}$$

A chaque point x de V_m, nous associons le repère (B_0, B_a, B_p) $(p, q, r = m+1, m+2, ..., n)$ défini par les relations

$$B_0 = A_0, \quad B_a = x^i_a A_i, \quad B_p = n^i_p A_i, \tag{36}$$

où n^i_p sont $n - m$ vecteurs affines linéairement indépendants, qui satisfont au système

$$g_{ij} x^i_a n^i_p = 0. \tag{37}$$

Ce système détermine les vecteurs n_p^i jusqu'à une transformation linéaire

$$n_{p'}^i = c_{p'}^p n_p^i \tag{38}$$

et

$$\det \|c_{p'}^p\| \neq 0. \tag{39}$$

Par suite, il définit par chaque point $x \in V_m$, un $n-m$–plan qui est l'union du point x avec le $n-m-1$–plan polaire au m-plan tangent à V_m, en x, dans la polarité fondamentale. C'est le $n-m$–plan normal à V_m, en x dans la métrique riemannienne associée. L'ensemble de ces $n-m$–plans normaux quand x décrit V_m, définit une variété non holonome V_m^{n-m} normale à V_m.

En différentiant les relations (36) on obtient d'après (1) et (3)

$$\begin{aligned} dB_0 &= p_k dx^k A_0 + dx^i A_i, \\ dB_a &= x_a^j \gamma_{kj}^0 dx^k A_0 + (dx_a^i + \gamma_{kj}^i dx^k x_a^j) A_i, \\ dB_p &= n_p^j \gamma_{kj}^0 dx^k A_0 + (dn_p^i + \gamma_{kj}^i dx^k n_p^j) A_i. \end{aligned} \tag{40}$$

Mais comme sur V_m

$$dx^i = x_a^i du^a, \tag{41}$$

en posant

$$\gamma_{ba}^0 = x_b^k x_a^j \gamma_{kj}^0, \ \gamma_{bp}^0 = x_b^k n_p^j \gamma_{kj}^0, \ g_{ba} = x_b^k x_a^j g_{kj} \tag{42}$$

il résulte de (18) et (37)

$$\gamma_{ab}^0 = -\frac{1}{c}\, g_{ab}, \ \gamma_{pq}^0 = 0. \tag{43}$$

En posant encore

$$p_a = x_a^i p_i \tag{44}$$

nous pouvons écrire les équations

$$\begin{aligned} dB_0 &= p_a du^a B_0 + du^a B_a, \\ dB_a &= -\frac{1}{c}\, g_{ab} du^b B_0 + \gamma_{ab}^c du^b B_c + h_{ba}^p du^b B_p, \\ dB_p &= h_{bp}^h du^b B_c + \gamma_{bp}^q du^b B_q. \end{aligned} \tag{45}$$

En les comparant avec (40), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_a x_b^i + \gamma_{jk}^i x_a^j x_b^k &= \gamma_{ab}^c x_c^i + h_{ab}^q n_q^i, \\ \partial_a n_p^i + \gamma_{jk}^i x_a^j n_p^k &= h_{ap}^c x_c^i + \gamma_{ap}^q n_q^i. \end{aligned} \tag{46}$$

Si nous posons maintenant

$$\gamma_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c + p_a \delta_b^c, \ \gamma_{ap}^q = \Gamma_{ap}^q + p_a \delta_p^q \tag{47}$$

les équations (46) peuvent se mettre sous la forme

$$(48)\qquad \begin{aligned}\nabla_a x_b^i &= \partial_a x_b^i + \Gamma_{jk}^i x_a^j x_b^k - \Gamma_{ab}^c x_c^i = h_{ab}^p n_p^i,\\ \nabla_a n_p^i &= \partial_a n_p^i + \Gamma_{jk}^i x_a^j n_p^k - \Gamma_{ap}^q n_q^i = h_{ap}^c x_c^i.\end{aligned}$$

On voit aisément que les quantités

$$(49)\qquad g_{pq} = g_{ij} n_p^i n_q^j, \ (\det \|g_{pq}\| \neq 0)$$

sont les composantes d'un tenseur covariant du deuxième ordre par rapport aux transformations (38).

En considérant alors les réciproques des (x_a^i, n_p^i) notées avec (x_i^c, n_i^q) et données par

$$(50)\qquad x_i^c = x_e^i g_{i\ell} g^{ce}, \ n_i^q = n_s^\ell g_{i\ell} g^{qs},$$

on obtient des équations (48)

$$(51)\qquad \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{jk}^i x_a^j x_b^k x_i^c + x_i^c \partial_a x_b^i, \ \Gamma_{ap}^q = \Gamma_{jk}^i x_a^j n_p^k n_i^q + n_i^a \partial_a n_p^i$$

et

$$(52)\qquad h_{ab}^p = \nabla_a x_b^i n_i^p, \ h_{ap}^b = \nabla_a n_p^i x_i^b.$$

On voit aisément que Γ_{ab}^c sont les paramètres d'une connexion affine symétrique sur V_m. En ce qui concerne Γ_{ap}^q ils se transforment à un changement de coordonnées sur V_m comme les composantes d'un vecteur covariant et à un changement (38) des vecteurs n_p^i selon la loi

$$(53)\qquad \Gamma_{ap'}^{q'} = \Gamma_{ap}^q C_{p'}^p C_q^{q'} + \partial_a C_{p'}^r C_r^{q'}.$$

Ils sont par suite les paramètres d'une connexion affine sur V_m^{n-m}. Enfin h_{ab}^p et h_{ap}^b se transforment au changement des coordonnèes sur V_n et des vecteurs n_p^i, comme des tenseurs affines mixtes. Nous les appelons *les tenseurs de courbure eulerienne pour* V_m.

En dérivant covariant les dernieres relations (42) on obtient d'après (19), (48) et (37)

$$(54)\qquad \nabla_c g_{ab} = 0.$$

Mais les Γ_{ab}^c étant symétriques, il en résulte

$$(55)\qquad \Gamma_{ab}^c = \left\{ {c \atop a\ b} \right\}_g.$$

Aussi, par dérivation covariante, les relations (49) nous donnent, d'après (19), (48) et (37)

$$(56)\qquad \nabla_c g_{pq} = 0.$$

En considérant maintenant les quantités

$$(57)\qquad e_0^\alpha = \delta_0^\alpha, \ e_a^\alpha = \delta_i^\alpha x_a^i, \ e_p^\alpha = \delta_i^\alpha n_p^i,$$

nous pouvons écrire les relations (36) sous la forme

$$(58)\qquad B_\lambda = e_\lambda^\alpha A_\alpha, \ B_p = e_p^\alpha A_\alpha, \ (\lambda, \mu, \nu = 0, 1, ..., m).$$

Il en résulte, d'après (1) et (3)

$$dB_\lambda = (de^\alpha_\lambda + \gamma^\alpha_{i\beta} dx^i e^\beta_\lambda) A_\alpha, \; dB_p = (de^\alpha_p + \gamma^\alpha_{i\beta} dx^i e^\beta_i) A_\alpha \tag{59}$$

et en les comparant avec (45) on obtient les équations

$$\begin{aligned} De^\alpha_\lambda &= \partial_a e^\alpha_\lambda + \gamma^\alpha_{i\beta} x^i_a e^\beta_\lambda - \gamma^\mu_{a\lambda} e^\alpha_\mu = h^p_{a\lambda} e^\alpha_p, \\ De^\alpha_p &= \partial_a e^\alpha_p + \gamma^\alpha_{i\beta} x^i_a e^\beta_p - \gamma^q_{ap} e^\alpha_p = h^c_{ap} e^\alpha_c, \end{aligned} \tag{60}$$

où nous avons posé

$$\gamma^\lambda_{a0} = \delta^\lambda_a + \delta^\lambda_0 p_a, \; h^p_{a0} = 0. \tag{61}$$

Si nous faisons la transformation

$$\gamma^\alpha_{i\beta} = \Gamma^\alpha_{i\beta} - \delta^\alpha_\beta p_i, \; \gamma^\mu_{a\lambda} = \Gamma^\mu_{a\lambda} - \delta^\mu_{a\lambda} p_a, \; \gamma^q_{ap} = \Gamma^q_{ap} - \delta^q_p p_a, \tag{62}$$

les équations (60) prennent la forme équivalente

$$\begin{aligned} D_a e^\alpha_\lambda &= \partial_a e^\alpha_\lambda + \Gamma^\alpha_{i\beta} x^i_a e^\beta_\lambda - \Gamma^\mu_{a\lambda} e^\alpha_\mu = h^p_{a\lambda} e^\alpha_p, \\ D_a e^\alpha_p &= \partial_a e^\alpha_p + \Gamma^\alpha_{i\beta} x^i_a e^\beta_p - \Gamma^q_{ap} e^\alpha_p = h^c_{ap} e^\alpha_c. \end{aligned} \tag{63}$$

Considérons un point M de l'espace tangent à V_m en x. Nous pouvons écrire

$$M = X^\alpha A_\alpha = Z^\lambda B_\lambda + Z^p B_p \tag{64}$$

et d'après (58) il en résulte

$$X^\alpha = Z^\lambda e^\alpha_\lambda + Z^p e^\alpha_p. \tag{65}$$

Alors l'équation de l'hyperquadrique (10) par rapport au repère (B_λ, B_p) prend la forme

$$c(Z^0)^2 + g_{ab} Z^a Z^b + g_{pq} Z^p Z^q = 0. \tag{66}$$

Il en résulte que cette hyperquadrique coupe le m-plan tangent à V_m selon la $m-1$–quadrique

$$c(Z^0)^2 + g_{ab} Z^a Z^b = 0 \tag{67}$$

et le $n-m$–plan normal en x à V_m selon la $n-m-1$–quadrique

$$c(Z^0)^2 + g_{pq} Z^p Z^q = 0. \tag{68}$$

Soit maintenant C une courbe regulière de V_m, représentée paramétriquement par les équations

$$u^a = u^a(t) \tag{69}$$

et $M(t)$ un champ de points dans les m-plans tangents à V_m le long de C donné par

$$Z^\lambda = Z^\lambda(t). \tag{70}$$

Les points de ce champ sont correspondants dans la connexion projective induite sur V_m, de paramètres

$$\Gamma^\lambda_{a0} = \delta^\lambda_a, \; \Gamma^0_{ab} = \frac{1}{c}\, g_{ab}, \; \Gamma^c_{ab} = \left\{ {c \atop ab} \right\}_g \tag{71}$$

seulement s'ils satisfont au système

$$\frac{DZ^\lambda}{dt} = \frac{dZ^\lambda}{dt} + \Gamma^\lambda_{a\mu} \frac{du^a}{dt} Z^\mu = \rho Z^\lambda. \tag{72}$$

Mais pour les points situés dans les espaces tangents à V_m nons avons d'après (65)

$$X^\alpha = Z^\lambda e^\alpha_\lambda \tag{73}$$

et par suite en tenant compte de (63) il vient

$$\frac{DX^\alpha}{dt} = \frac{DZ^\lambda}{dt} e^\alpha_\lambda + h^p_{a\lambda} Z^\lambda \frac{du^a}{dt} e^\alpha_p. \tag{74}$$

Donc les points $M(t)$, correspondants dans la connexion projective de V_m, satisfont aux relations caractéristiques

$$\frac{DX^\alpha}{dt} = \rho X^\alpha + h^p_{a\lambda} \frac{du^a}{dt} Z^\lambda e^\alpha_p. \tag{75}$$

Nous avons par suite.

Théorème 7. *Pour que tes points d'un champ, situés dans les espaces tangents à V_m le long de C, soient correspondants dans la connexion projective induite sur V_m il faut et il suffit que les points obtenus d'eux par dérivation absolue soient contenus dans $n-m$-plans déterminés par les points du champ donne et les $n-m-1$-plans correspondants aux m-plans tangents à V_m dans la polarité absolue.*

En posant

$$g_{\lambda u} = g_{\alpha\beta} e^\alpha_\lambda e^\beta_\mu, \tag{76}$$

on obtient d'après (17), (37) et (63)

$$D_a g_{\lambda u} = 0. \tag{77}$$

Par suite, pour tout champ de points $Z^\lambda(t)$, correspondants le long de $C \subset V_m$ dans la connexion projective induite, on a d'après (72)

$$\frac{d}{dt}(g_{\lambda\mu} Z^\lambda Z^\mu) = 2\rho g_{\lambda\mu} Z^\lambda Z^\mu.$$

II en résulte

Théorème 8. *Une connexion métrique projective symétrique* (21) *sur V_m qui conserve le champ d'hyperquadriques* (10), *induit sur V_m une connexion elle aussi métrique projective symétrique* (71) *qui conserve le champ de $m-1$-quadrique* (67) *d'intersection du champ d'hyperquadriques* (10) *avec les m-plans tangents à V_n.*

Nous avons aussi

Théorème 9. *A la connexion métrique projective* (71) *sur V_m est associée la connexion riemannienne définie par g_{ab}, induite sur V_m par la connexion riemannienne de V_n déterminée par g_{ij}, c'est-à-dire associèe à la connexion métrique projective* (20) *sur V_n.*

En notant par C_p et C_r respectivement la connexion projective et la connexion riemannienne et par i et a les opérations d'induction et d'association on a le suivant diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C_p(V_n) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & C_r(V_n) \arrow[d, "i"] \\ C_p(V_m) \arrow[r, "a"] & C_r(V_m) \end{tikzcd} \tag{73}$$

Considérons maintenant le long de la courbe $C \subset V_m$, réprésentée par les équations (69), un champ de points $N(t)$ contenus dans les $n-m$–plans normaux à V_m le long de C, donné par

$$Z^\rho = Z^\rho(t) \ (\rho, \sigma, \tau = 0, m+1, ..., n). \tag{74}$$

Les points de ce champ sont correspondants dans la connexion projective induite sur V_m^{n-m}, de paramètres

$$\Gamma^\rho_{a0} = \delta^\rho_a, \ \Gamma^0_{cp} = 0, \ \Gamma^q_{ap} = \Gamma^i_{jk} x^j_a n^k_p n^q_i + n^q_i \partial_a n^i_p, \tag{75}$$

s'ils satisfont au système

$$\frac{DZ^\rho}{dt} = \frac{dZ^\rho}{dt} + \Gamma^\rho_{a\tau} \frac{du^a}{dt} Z^\tau = \lambda Z^\rho. \tag{76}$$

Mais pour des points situes dans les $n-m$–plans normaux à V_m nous avons

$$X^\alpha = Z^\rho e^\alpha_\rho \tag{77}$$

et par suite en posant, d'après (63)

$$D_a e^\alpha_\rho = \partial_a e^\alpha_\rho + \Gamma^\alpha_{i\beta} x^i_a e^\beta_\rho - \Gamma^\sigma_{a\rho} e^\alpha_\sigma = h^c_{a\rho} e^\alpha_c \tag{78}$$

où

$$h^c_{a0} = \delta^c_a, \tag{79}$$

on obtient pour le champ de points (74)

$$\frac{DX^\alpha}{dt} = \frac{DZ^\rho}{dt} e^\alpha_\rho + h^c_{a\rho} \frac{du^a}{dt} Z^\rho e^\alpha_c. \tag{80}$$

Il en résulte pour un champ de points (74) correspondants dans la connexion de V_m^{n-m}, les relations caractéristiques

$$\frac{DX^\alpha}{dt} = \lambda X^\alpha + h^c_{a\rho} \frac{du^a}{dt} Z^\rho e^\alpha_c \tag{81}$$

et par suite

Théorème 9. *Une condition nécessaire et suffisante pour que les points d'un champ situés dans les $n-m$–plans normaux à V_m le long d'une courbe $C \subset V_m$ soient correspondants dans la connexion induite sur V_m^{n-m} est que les points obtenus de ceux-ci par dérivation asbolue soient contenus dans les m-plans déterminés par les points du champ donne et les $m-1$–plans d'intersection des m-plans tangents à V_m avec les hyperplans polaires aux points de C dans la polarité absolue.*

Considérant le tenseur

$$g_{\sigma\tau} = g_{\alpha\beta} e_\sigma^\alpha e_\tau^\beta \tag{82}$$

on obtient, d'après (17), (37) et (78)

$$D_a g_{\sigma\tau} = 0 \tag{83}$$

et par suite, pour tout champ de points $Z_\rho(t)$, correspondants dans la connexion projective de V_m^{n-m} le long de $C \subset V_m$, on déduit en tenant compte du système (76),

$$\frac{d}{dt}\,(g_{\sigma\tau} Z^\rho Z^\tau) = 2\lambda g_{\sigma\tau} Z^\sigma Z^\tau. \tag{84}$$

On en obtient le résultat

Théorème 10. *Une connexion métrique projective* (21) *sur V_n qui conserve le champ d'hyperquadriques* (10) *induit sur la variété non holonome V_m^{n-m}, normale à V_m, une connexion métrique projective* (75) *qui conserve le champ de $n-m-1$–quadriques* (68) *obtenues par l'intersection des h'yperquadriques* (10) *avec les $n-m$–plans normaux à V_m.*

Des relations (56) et (75) on obtient

Théorème 11. *A la connexion métrique projective* (75) *sur V_m^{n-m} est associée la connexion métrique affine Γ_{ap}^q relative au tenseur g_{qp}, induite sur V_m^{n-m} par la connexion riemannienne de V_n définie par g_{ij}.*

En notant par $C_a(V_m^{n-m})$ la connexion métrique affine de paramètres Γ_{ap}^q sur V_m^{n-m} nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_p(V_n) & \xrightarrow{\;a\;} & C_r(V_n) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ C_p(V_m^{n-m}) & \xrightarrow{\;a\;} & C_a(V_m^{n-m}) \end{array}$$

Si nous considérons comme système fondamental d'équations pour une variété V_m plongée régulièrement dans V_n, l'ensemble des équations (35) et (48) dans les fonctions inconnues x^i, x_a^i, n_p^i, alors ses conditions d'intégrabilite seront les suivantes

$$\begin{aligned} &\nabla_{[a} x_{b]}^h = \Gamma_{[ab]}^c x_c^h = h_{[ab]}^p n_p^h, \\ &\nabla_{[a}\nabla_{b]} x_c^h = \Gamma_{ijk}^h x_a^i x_b^j x_c^k - \Gamma_{abc}^d x_d^h = \nabla_{[a} h_{b]c}^p n_p^h + h_{[a|p|}^d h_{b]c}^p x_d^h, \\ &\nabla_{[a}\nabla_{b]} n_p^h = \Gamma_{ijk}^\ell x_a^i x_b^j n_p^k - \Gamma_{abp}^q n_q^h = \nabla_{[a} h_{b]p}^c x_c^h + h_{[a|c|}^q h_{b]p}^c n_q^h, \end{aligned} \tag{86}$$

Ici

$$\Gamma^d_{abc} = \partial_{[a}\Gamma^d_{b]c} + \Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c},\ \Gamma^q_{abp} = \partial_{[a}\Gamma^q_{b]p} + \Gamma^q_{[a|r|}\Gamma^r_{b]p} \tag{87}$$

sont respectivement le tenseur de courbure riemannienne de V_m et le tenseur de courbure métrique affine de V_m^{n-m}.

Par la multiplication avec x^ℓ_h et n^ℓ_h les conditions (86) prennent la forme équivalente

$$\begin{gathered}\Gamma^c_{[ab]} = 0,\ h^p_{[ab]} = 0,\\ \Gamma^h_{ijk}x^i_a x^j_b x^k_c x^d_h - \Gamma^d_{abc} = h^d_{[a|p|}h^p_{b]c},\ \Gamma^h_{ijk}x^i_a x^j_b x^k_c n^p_h = \nabla_{[a}h^p_{b]c},\\ \Gamma^h_{ijk}x^i_a x^j_b x^k_p n^c_h = \nabla_{[a}h^c_{b]p},\ \Gamma^h_{ijk}x^i_a x^j_b n^k_p n^q_h - \Gamma^q_{abp} = h^q_{[a|c|}h^c_{b]p},\end{gathered} \tag{88}$$

Des relations (57) il résulte

$$x^a_a = \delta^i_\alpha e^\alpha_a,\ n^i_p = \delta^i_\alpha e^\alpha_p \tag{89}$$

et par suite nous pouvons considérer aussi comme équations fondamentales pour V_m en V_n à connexion métrique projective, l'ensemble des équations (35) et (63) dans les fonctions inconnues $x_i, e^\alpha_\lambda, e^\alpha_q$. Alors leurs conditions d'integrabilité seront

$$\begin{gathered}D_{[a}e^r_{b]} = \Gamma^\lambda_{[ab]}e^r_\lambda = h^p_{[ab]}e^r_p,\\ D_{[a}D_{b]}e^\alpha_\lambda = R^\alpha_{ij\beta}x^i_a x^j_b e^\beta_\lambda - R^\mu_{ab\lambda}e^\alpha_\mu = D_{[a}h^q_{b]\lambda}e^\alpha_q + h^\mu_{[a|p|}h^p_{b]\lambda}e^\alpha_\mu,\\ D_{[a}D_{b]}e^\alpha_p = R^\alpha_{ij\beta}x^i_a x^j_p e^\beta_p - R^q_{abp}e^\alpha_q = D_{[a}h^\mu_{b]p}e^\alpha_\mu + h^q_{[a|\lambda|}h^\lambda_{b]p}e^\alpha_q.\end{gathered} \tag{90}$$

Dans ces équations interviennent les tenseurs de courbure et torsion projective de V_m et V_m^{n-m} qui ont respectivement les composantes

$$R^\lambda_{ab0} = 0,\ R^0_{abc} = 0,\ R^d_{abc} = \Gamma^d_{abc} - \frac{1}{c}\,\delta^d_{[a}g_{b]c} \tag{91}$$

et

$$R^\rho_{abc} = 0,\ R^0_{abp} = 0,\ R^q_{abp} = \Gamma^q_{abp}. \tag{92}$$

${R_a}^d{}_{bc}$ et ${R_a}^q{}_{bp}$ seront appelés les *tenseurs de courbure métrique projective de V_m et V_m^{n-m}.*

En multipliant les eqnations (90) par les quantités $(e^\nu_\alpha, e^r_\alpha)$ réciproques de $(e^\alpha_\nu, e^\alpha_r)$, on obtient les conditions équivalentes

$$\Gamma^{\lambda}_{[ab]} = 0, \; h^{p}_{[ab]} = 0,$$

(93) $$R^{\alpha}_{ij\beta} x^i_a x^j_b e^{\beta}_{\lambda} e^{\mu}_{\alpha} - R^{\mu}_{ab\lambda} = h^{\mu}_{[a|p|} h^{p}_{b]\lambda}, \; R^{\alpha}_{ijp} x^i_a x^j_b e^{\beta}_{\lambda} e^{p}_{\alpha} = D_{[a} h^{p}_{b]\lambda},$$

$$R^{\alpha}_{ij\beta} x^i_a x^j_b e^{\beta}_{p} e^{\lambda}_{\alpha} = D_{[a} h^{\lambda}_{b]p}, \; R^{\alpha}_{ij\beta} x^i_a x^j_b e^{\beta}_{p} e^{q}_{\alpha} - R^{q}_{abp} = h^{q}_{[a|c|} h^{c}_{b]p}.$$

Les relations entre $(e^{\alpha}_{\lambda}, e^{\alpha}_{p})$ et (x^i_a, n^i_p), les paramètres des connexions métriques projectives et les paramètres des connexions riemanniennes associées, les tenseurs de courbure métrique projective et les tenseurs de courbure riemannienne associés de V_n, V_m et V^{n-m}_m nous conduisent aisément au résultat

Théorème 12. *Les équations fondamentales* (35), (63) *et leurs conditions d'intégrabilité* (93), *pour V_m plongée dans V_n à connexion métrique projective, sont équivalentes respectivement aux équations fondamentales* (35), (48) *et leurs conditions d'intégrabilité* (88), *pour V_m considerée plongée dans V_n avec la connexion riemannienne associée.*

En tenant compte que la connexion riemannienne, associèe à une connexion métrique projective sans courbure et torsion, est de courbure constante, on déduit du théorème precedent que le probleme du plongement d'un espace à connexion métrique projective symétrique dans un espace a métrique projective se réduit au problème déjà étudié [3], du plongement d'un espace de Riemann dans un espace à courbure constante.

Les équations fondamentales et leurs conditions d'intégrabilité étant établies, on peut étudier diverses questions sur les variétés plongées dans l'espace à connexion métrique projective. Sans nous arrêter sur ces questions nous finissons avec les remarques suivantes:

Pour $R_{ij} = 0$, on obtient de nos considérations la théorie des variétés d'un espace à connexion métrique projective normale et d'un espace d'Einstein.

Pour $R^{\ell}_{ijk} = 0$ on obtient la théorie des variétés d'un espace à métrique projective et d'un espace de courbure constante.

Enfin, en faisant $c \to \infty$ et en supposant que g_{ij} restent finis, on obtient la théorie des variétés d'un espace de Riemann, d'Einstein spécial et d'Euclide respectivement pour $R_{ij} \neq 0$, $R_{ij} = 0$ et $R^{\ell}_{ijk} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bortolotti E. e Hlavaty V., *Contributi alla teoria delle connessioni.* Annali di Matematica (4) 15, (1936), p. 1-45, 129-154.
2. Cartan E., *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective.* Paris, 1937.
3. Matsumoto M., *Local imbedding of Riemann spaces.* Memoirs College of Sci. Univ. of Kyoto, ser. A, vol. 28 (1954), p. 179-207.
4. Mihăileanu N.N., *Geometrie diferențială, neeuclidiană.* Buc. Ed. Acad. R.S. Romania, 1964.
5. Sasaki S. and Yano K., *On the structure of spaces with normal projective connexions, whose groups of holonomy fix a hyperquadric of $n-2$ dimensions.* Tohôku Math. J. II, Ser. 1 (1949), p. 31-39.
6. Sato S., *On a projective connection and Riemannian metric.* Tensor, New Series, 14 (1963), p. 1-5.

7. Schouten J.A., *La théorie projective de la relativité.* Ann. Inst. H. Poincaré, 5 (1935), p. 51-88.
8. Verblen O., *Projective Relativitdtstheorie. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* II. 1. 1933, 73 p.
9. Vrănceanu Gh., *Sur les espaces à connexion projective dont le groupe de holonomie fixe une quadrique.* Tohôku Math. Journ. II, Ser. 4 (1952), p. 103–108.
10. Weyl H., *Zur Infinitesimalgeometrie. Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung.* Gattinger Nachrichten (1921). p. 99-112.