8 Sur les connexions compatibles à une structure métrique où presque symplectique

Collaboration avec Radu Miron

Mathematica,
vol 9 (32), 2, 1967, pp. 245-252.

1. Soit V_N une variété différentiable de la classe C^∞ douée d'une structure définie par un tenseur non-dégénéré g_{ij}. Cette structure sera nommée $g.m.$-structure ou $g.a.s.$-structure selon que $g_{[ij]} = 0$ ou $g_{(ij)} = 0$ (donc $N = 2n$). Nous appellerons g-structure n'importe quelle de ces deux structures.

Toute g-structure détermine un isomorphisme de l'espace tangent $T_p(V_N)$ sur son dual $T_p^*(V_N)$ pour chaque $p \in V_N$ par les équations

$$u_i = g_{ij}v^j. \tag{1}$$

Considérons V_n douée d'un couple ordonné de connexions affines (Γ, G).

Défintion. On dit qu'un couple de connexions (Γ, G) est *compatible* à une g-structure si en transportant par parallélisme sur une courbe arbitraire de V un vecteur quelconque v^j par rapport à la connexion G, son image u_i par g, se transporte par parallelisme sur la même courbe, relativement à la connexion Γ.

En utilisant l'opérateur de la dérivation covariante mixte [4], un couple de connexions (Γ, G) compatible à une g-structure peut être caractérisé de la manière suivante:

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de connexions* (Γ, G) *soit compatible à une g-structure est*

$$\nabla_k g_{i(j)} = 0. \tag{2}$$

Compte tenu que

$$\nabla_k g_{i(j)} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^h_{ki} g_{hj} - G^h_{kj} g_{ih}$$

et que la g-structure est g.m. ou g.a.s.-structure il résulte d'après (2) *les équations équivalentes*

$$\nabla_k g_{(i)j} = 0. \tag{3}$$

Théorème 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple de connexions* (Γ, G) *soit compatible à une g-structure est que les équations* (3) *soient satisfaites.*

Des équations (2) et (3) il résulte que l'ordre des connexions Γ, G dans le couple (Γ, G) n'est pas essentiel.

On peut remarquer que les équations (2) ou (3) sont équivalentes à n'importe quelle relation:

$$G^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + g^{kh}\nabla_j g_{ki}, \; \Gamma^h_{ji} = G^h_{ji} + g^{kh}\nabla_j g_{(k)(i)}, \tag{4}$$

où g^{kh} est le tenseur défini par les équations

$$g^{ki}g_{kj} = g^{ik}g_{jk} = \delta^i_j. \tag{5}$$

De (4) on obtient les résultats:

Théorème 3. *Les équations* (4_1) *ou* (4_2) *caractérisent un couple de connexions compatibles à une g-structutre.*

Théorème 4. *Etant donnée une connexion affine* Γ *et une g-structure sur* V_N *il existe une connexion affine* G *uniquement déterminée de sorte que le couple* (Γ, G) *soit compatible à la g-structure donnée.*

Nous pouvons caractériser le couple de connexions (Γ, G) par la connexion moyenne γ et le tenseur de déformation τ définis par

$$\gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}(G^h_{ji} + \Gamma^h_{ji}), \; \tau^h_{ji} = G^h_{ji} - \Gamma^h_{ji}. \tag{6}$$

D'après (4) nous avons

$$\gamma^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{kh}\nabla_j g_{ki} = G^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{kg}\nabla_j g_{(k)(i)}, \;\; \tau^h_{ji} = g^{kh}\nabla_j g_{ki} = -g^{kh}\nabla_j g_{(k)(i)}. \tag{7}$$

Remarque. Des équations (7_1) il résulte que l'opérateur considéré par M.Obata [3]

$$\Lambda\Gamma^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{kh}\nabla_j g_{ki}$$

satisfait à la condition

$$\Lambda\Gamma^h_{ji} = \gamma^h_{ji}$$

qui réprésente une interprétation géométrique de cet opérateur.

Nous utiliserons dans la suite les tenseurs suivants associés à une g-structure [3]

$$\Omega^{sh}_{ir} = \frac{1}{2}(\delta^s_i\delta^h_r - g_{ir}g^{hs}), \;\; {}^*\Omega^{sh}_{ir} = \frac{1}{2}(\delta^s_i\delta^h_r + g_{ir}g^{hs}). \tag{8}$$

Ils possèdent les propriétés

$$\Omega + {}^*\Omega = \delta\delta, \; \Omega\Omega = \Omega, \; \Omega{}^*\Omega = 0, \; {}^*\Omega\Omega = 0, \; {}^*\Omega{}^*\Omega = {}^*\Omega. \tag{9}$$

En utilisant (6), de (3) et (4) il résulte:

Théorème 5. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple* (Γ, G) *soit compatible à une g-structure est que les équations*

$$\overset{m}{\nabla}_k g_{ij} = 0, \quad \Omega^{ji}_{h\ell}\tau^{\ell}_{kj} = 0 \tag{10}$$

soient satisfaites.

Comme applications nous chercherons le cas où le couple $(\Gamma^h_{ji}, \Gamma^h_{ij})$ est compatible à une g-structure. La connexion moyenne γ étant la partie symétrique de la connexion Γ, il s'ensuit d'après (10_1) que celle-ci est riemannienne ou symplectique si la g-structure est métrique ou presque symplectique [5]. Le tenseur τ de ce couple coïncide avec le tenseur de torsion de la connexion Γ. Par suite nous avons le

Théorème 6. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le couple* $(\Gamma^h_{ji}, \Gamma^h_{ij})$ *soit compatible à une g-structure est que les relations*

$$\overset{m}{\nabla}_k g_{ij} = 0, \ \Omega^{ji}_{h\ell}\Gamma^{\ell}_{[kj]} = 0, \ (\gamma^h_{ji} = \Gamma^k_{(ji)})$$

soient satisfaites.

Comme une conséquence de ce théorème nous avons le

Théorème 7. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une g.a.s.-structure sur* V_{2n} *soit symplectique est qu'il existe une connexion* Γ^h_{ji} *de sorte que le couple* $(\Gamma^h_{ji}, \Gamma^h_{ij})$ *soit compatible avec cette structure.*

2. Le problème de la détermination d'une g-structure compatible à un couple de connexions (Γ, G) données peut être résolu de la même manière que le problème similaire pour une F-structure, considéré dans [1].

Nous considérons dans la suite le problème de la détermination de tous les couples de connexions (Γ, G) compatibles à une g-structure donnée sur V_N. Cela revient à la détermination des couples d'objets géométriques γ, τ qui satisfont à (10). Mais d'après [3] et [5] la solution pour (10) est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma^h_{ji} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{kh}\nabla_j g_{ki} + \frac{1}{2}\, \Omega^{sh}_{ir} U^r_{js}, \\ \tau^h_{ji} &= {}^*\Omega^{sh}_{ir} V^r_{js} \end{aligned} \tag{11}$$

où la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji}$ et les tenseurs U^r_{js}, V^r_{js} son arbitraires.

Il en résulte, compte tenu de

$$\Gamma = \gamma - \frac{\tau}{2}, \quad G = \gamma + \frac{\tau}{2},$$

que le couple (Γ, G) est donné par

$$
\begin{aligned}
\Gamma^h_{ji} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{hk}\nabla_j g_{ki} + \Omega^{sh}_{ir} U^r_{js} - \frac{1}{2}\, {}^*\Omega^{sh}_{ir} V^r_{js}, \\
G^h_{ji} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{hk}\nabla_j g_{ki} + \frac{1}{2}\, \Omega^{sh}_{ir} U^r_{js} + \frac{1}{2}\, {}^*\Omega^{sh}_{ir} V^r_{js},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Par suite, si $\overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ij}$ est une connexion quelconque et U^h_{ji}, V^h_{ji} sont deux tenseurs arbitraires sur V_N, les formules (12) donnent tous les couples de connexions (Γ, G) compatibles avec la g-structure donnée. Nous allons montrer que (12) représente la solution générale du problème même si la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji}$ est fixée. En effet, soit

$$\overset{\circ}{\overline{\Gamma}}{}^h_{ji} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + A^h_{ji}.$$

D'après un calcul simple on obtient

$$\frac{1}{2}\, g^{kh}\, \overset{\circ}{\overline{\nabla}}_j g_{ki} = \frac{1}{2}\, g^{kh}\, \overset{\circ}{\nabla}_j g_{ki} - {}^*\Omega^{sh}_{ir} A^r_{js}$$

d'où

$$\overset{\circ}{\overline{\Gamma}}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{hk}\, \overset{\circ}{\overline{\nabla}}_j g_{ki} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, g^{kh}\, \overset{\circ}{\nabla}_j g_{ki} + \Omega^{sh}_{ir} A^r_{is}.$$

Par suite, la transformation $\overset{\circ}{\Gamma} \longrightarrow \overset{\circ}{\overline{\Gamma}}$ en (12) modifie additivement le tenseur arbitraire U. Nous avons donc le

Théorème 8. *Tous les couples de connexions* (Γ, G) *compatibles à une* g*-structure donnée sur* V_N *sont contenus dans les formules* (12) *où les tenseurs* U, V *sont arbitraires et* $\overset{\circ}{\Gamma}$ *est une connexion fixée.*

3. Nous allons chercher la liaison entre deux couples de connexions (Γ, G) et $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ compatibles à une g-structure fixée. Si les deux couples correspondent respectivement aux couples de tenseurs (U, V) et $(\overline{U}, \overline{V})$ alors en mettant

$$P^h_{ji} = \overline{U}^h_{ji} - U^h_{ji}, \quad Q^h_{ji} = \overline{V}^h_{ji} - V^h_{ji}$$

on obtient de (12)

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \frac{1}{2}\, \Omega^{sh}_{ir} P^r_{js} - \frac{1}{2}\, {}^*\Omega^{sh}_{ir} Q^r_{is}, \\
\overline{G}^h_{ji} &= G^h_{ji} + \frac{1}{2}\, \Omega^{sh}_{ir} P^r_{js} + \frac{1}{2}\, {}^*\Omega^{sh}_{ir} Q^r_{is}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Réciproquement, si (Γ, G) est un couple compatible à une g-structure donnée et P, Q deux tenseurs du type (1,2) alors le couple (Γ, G) donné par (13) est compatible avec la g-structure donnée. En effet, en substituant en (13) les expressions (12), on obtient pour le couple $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ des relations de la forme (12). Ainsi nous obtenons le

Théorème 9. *La plus générale transformation des couples de connexions compatibles à une g-structure fixée sur V_N est donnée par les formules* (13) *où les tenseurs P^h_{ji} et Q^h_{ji} son arbitraires.*

Remarque. On voit aisément que les transformations des couples de connexions compatibles à une g-structure forment un groupe $\mathcal{T}$ et qu'il existe un homomorphisme naturel du groupe additif $\mathcal{G}$ des couples de tenseurs $(P^h_{ji}, Q^h_{ji}))$ sur le groupe $\mathcal{C}$, le noyau duquel est formé par les couples (P, Q) doues de la propriété

$$\Omega^{sh}_{ir} P^r_{js} = 0, \quad {}^*\Omega^{sh}_{ir} Q^r_{js} = 0. \tag{14}$$

Pour la connextion moyenne γ et le tenseur de déformation τ on obtient de (13)

$$\overline{\gamma}^h_{ji} = \gamma^h_{ji} + \frac{1}{2}\, \Omega^{sh}_{ir} P^r_{js}, \quad \overline{\tau}^h_{ji} = \tau^h_{ji} + {}^*\Omega^{sh}_{ir} Q^r_{js}. \tag{15}$$

Remarques.

1. La connexion moyenne γ est invariante si P^h_{ji} satisfait à la condition (14_1) et τ est invariant quand Q^h_{ji} vérifie la relation (14_2).
2. De (15_1) et (8_2) il résulte

$$ {}^*\Omega^{i\ell}_{mh} \overline{\gamma}^h_{ji} = {}^*\Omega^{i\ell}_{mh} \gamma^h_{ji} \tag{16}$$

   et par suite l'objet géométrique ${}^*\Omega^{i\ell}_{mh}\gamma^h_{ji}$ est un invariant du groupe (13).

3. De (16), il résulte en particulier que

$$\overline{\gamma}^h_{jh} = \gamma^h_{jh}, \tag{17}$$

   c'est-à-dire γ^h_{jh} est aussi un invariant pour les transformations (13).

4. Nous considérons dans la suite un sous-groupe du groupe (13) déterminé par le problème suivant:

Etant donnèes les connexions $\Gamma, \overline{\Gamma}$ et une g-structure sur V_N, on doit déterminer les connexions $G, \overline{G}$ de sorte que les couples (Γ, G) et $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ soient compatibles avec la g-structure donnée.

D'après (4) les connexions G et $\overline{G}$ sont données par

$$G^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + g^{kh}\nabla_j g_{ki}, \quad \overline{G}^h_{ji} = \overline{\Gamma}^h_{ji} + g^{kh}\overline{\nabla}_j g_{ki}. \tag{18}$$

Pour déterminer les relations entre les couples (Γ, G) et $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ nous mettons

$$\overline{\Gamma}^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + R^h_{ji}, \quad \overline{G}^h_{ji} = G^h_{ji} + S^h_{ji}. \tag{19}$$

Il résulte alors de (18)

$$S^h_{ji} = -g^{kh} g_{ri} R^r_{jk}. \tag{20}$$

En substituant en (19) nous obtenons

$$\overline{\Gamma}^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + \Omega^{sh}_{ir} R^r_{js} + {}^*\Omega^{sh}_{ir} R^r_{js},$$
$$\overline{G}^h_{ji} = G^h_{ji} + \Omega^{sh}_{ir} R^r_{js} - {}^*\Omega^{sh}_{ir} R^r_{js}. \tag{21}$$

Ces relations s'obtiennent de (13) pour

$$P^r_{js} = -Q^r_{js} = R^r_{js}.$$

Un cas particulier remarquable s'obtient de la manière suivante.

Considérons la transformation projective particuliere

$$\overline{\Gamma}^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + U_{(j}\delta^h_{i)}$$

et de (20) on obtient

$$\overline{G}^h_{ji} = G^h_{ji} - \frac{1}{2}\, U_j\delta^h_i - \frac{1}{2}\, g_{ji}g^{kh}U_k.$$

En effectuant ensuite la transformation projective

$$\overline{G}^h_{ji} = G^h_{ji} + V_{(j}\delta^h_{i)},$$

de (20) il résulte

$$\overline{\Gamma}^h_{ji} = \overline{\Gamma}^h_{ji} - \frac{1}{2}\, V_j\delta^h_i - \frac{1}{2}\, g_{ji}g^{hk}V_k.$$

Le produit de ces deux transformations est la transformation remarquable

$$\overline{\Gamma}^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + U_{(j}\delta^h_{i)} - \frac{1}{2}\, V_j\delta^h_i - \frac{1}{2}\, g_{ji}g^{kh}V_k,$$
$$\overline{G}^h_{ji} = G^h_{ji} + V_{(j}\delta^h_{i)} - \frac{1}{2}\, U_j\delta^h_i - \frac{1}{2}\, g_{ji}g^{kh}U_k. \tag{22}$$

Pour ces transformations on trouve le tenseur invariant

$$D^h_{ji} = \tau^h_{ji} - \delta^h_j\tau_i - 2\delta^h_i\tau_j - g_{ij}g^{kh}\tau_k \tag{23}$$

où

$$\tau^h_{ji} = G^h_{ji} - \Gamma^h_{ji} \text{ et } \tau_j = \frac{1}{2(N+1)}\, \tau^h_{jk}.$$

On obtient aussi pour (22) l'objet géométrique invariant

$$\pi^h_{ji} = \gamma^h_{ji} - \delta^h_j\gamma_i + g_{ji}g^{kh}\gamma_k \tag{24}$$

où

$$\gamma^h_{ji} = \frac{1}{2}\, (G^h_{ji} + \Gamma^h_{ji}) \text{ et } \gamma_i = \frac{1}{N \pm 1}\, \gamma^h_{hi}.$$

(Nous prenons le signe "+" dans le cas presque-symplectique et "−" dans le cas métrique.)

Remarque. En faisant $h = i$ en (23) on obtient

$$D^h_{ih} = 0.$$

5. Nous allons donner une application simple de la théorie précédente a la détermination des couples de connexions (Γ, G) compatibles à une structure définie par un tenseur général g_{ij} pour lequelles les tenseurs $a_{ij} = g_{(ij)}$ et $b_{ij} = g_{[ij]}$ sont non-dégénérés. Dans ce cas nous exigerons que la condition de compatibilité soit donnée par les équations

$$\nabla_k g_{i(j)} = 0, \quad \nabla_k g_{(i)j} = 0 \tag{25}$$

qui sont équivalentes aux équations

$$\nabla_k a_{(i)j} = 0, \quad \nabla_k b_{(i)j} = 0. \tag{26}$$

La structure définie par a_{ij} étant métrique et celle définie par b_{ij}, presque symplectique, compte tenu du théorème 8, on obtient pour (26_1) et (26_2) respectivement les solutions générales

$$\begin{aligned}
\Gamma^h_{ji} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, a^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j a_{ki} + \frac{1}{2}\, \Omega^{sh}_{jr} U^r_{js} - \frac{1}{2}\, {}^*\Omega^{sh}_{ir} V^r_{js}, \\
G^h_{ji} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, a^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j a_{ki} + \frac{1}{2}\, \Omega^{sh}_{jr} U^r_{js} + \frac{1}{2}\, {}^*\Omega^{sh}_{ir} V^r_{js}, \\
\overline{\Gamma}^h_{ji} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, b^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j b_{ki} + \frac{1}{2}\, O^{sh}_{jr} \overline{U}^r_{js} - \frac{1}{2}\, {}^*O^{sh}_{ir} \overline{V}^r_{js}, \\
\overline{G}^h_{ji} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^h_{ji} + \frac{1}{2}\, b^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j b_{ki} + \frac{1}{2}\, O^{sh}_{jr} \overline{U}^r_{js} + \frac{1}{2}\, {}^*O^{sh}_{ir} \overline{V}^r_{js}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Ici $\overset{\circ}{\Gamma}$ est une connexion fixée, $U, V, \overline{U}, \overline{V}$ sont des tenseurs arbitraires et $\Omega, {}^*\Omega, O, {}^*O$ sont les opérateurs (8) construits respectivement avec les tenseurs a_{ij} et b_{ij}.

Les solutions communes pour les équations (25) ou (26) sont donnèes par (27_1) ou les tenseurs U, V satisfont aux conditions

$$\begin{aligned}
\Omega^{sh}_{ir} U^r_{js} &= b^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j b_{ki} - a^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j a_{ki} + O^{sh}_{ir} \overline{U}^r_{js}, \\
{}^*\Omega^{sh}_{ir} V^r_{js} &= {}^*O^{sh}_{ir} \overline{V}^r_{js},
\end{aligned} \tag{28}$$

$\overline{U}^r_{js}$ et $\overline{V}^r_{js}$ étant des tenseurs arbitraires qui satisfont aux relations

$${}^*\Omega^{i\ell}_{mh}(b^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j b_{ki} - a^{kh} \overset{\circ}{\nabla}_j a_{ki}) + {}^*\Omega^{i\ell}_{mh} O^{sh}_{ir} \overline{U}^r_{js} = 0, \quad \Omega^{i\ell}_{mh} {}^*\Omega^{sh}_{ir} \overline{V}^r_{js} = 0. \tag{29}$$

Dans ce cas la connexion moyenne $\gamma = \dfrac{1}{2}(G + \Gamma)$ satisfait au système

$$\overset{m}{\nabla}_k g_{ij} = 0, \tag{30}$$

c'est-à-dire est une solution pour le problème de Eisenhart [2] pour a_{ij} et b_{ij} non-dégénérés.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cruceanu V. et Miron R., *Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque-complexes.* Ann. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi, Sect. I, XIII, 1, 79-88 (1967).
2. Eisenhart L., *General Riemmann spaces.* I. Proc. Nat. Ac. Sci. U.S.A., 37, 5 (1951); II, P.N.A.S., 38, 6 (1952).
3. Obata M., *Affine connexions on manifolds with almost complex quaternion or Hermitian structure.* Jap. Journ. Math. 26, 43-77 (1956).
4. Norden A.P., *Espaces à connection affine.* M.-L. 1950.
5. Tondeur Ph., *Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fast-symplehtischer Struktur.* Comment. Math. Helv. 36, 234-244 (1961).