7 Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque complexes

Collaboration avec Radu Miron

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
s.I-a, Mat. XIII, 1967, f.1, 79-88.

Il y a divers travaux récents dans lesquels on a considéré des couples de connexions sur des variétés différentiables [2,5] douées de structures géométriques supplémentaires, pour lesquelles on a des relations de compatibilité.

Dans cette Note on considère une variété différentiable V_{2n}, douée d'un couple de connexions (Γ, G) et une structure presque complexe $F = (F^i_j)$. La relation de compatibilité entre ces objets géométriques est définie par la condition suivante: en transportant parallèlement un vecteur v^h, par rapport à la connexion G, son immage u^i par l'automorphisme F, $u^i = F^i_h v^h$, est transportée parallèlement par rapport à la connexion Γ sur V_{2n}.

La présence des deux connexions Γ, G permet d'exprimer géométriquement la relation de compatibilité en utilisant un algorithme de dérivation covariante mixte [3]. On obtient ainsi différentes caractérisations de la condition de compatibilité, on trouve tous les couples de connexions (Γ, G) si la F-structure est donnée, on détermine le groupe de transformations des couples (Γ, G) qui conservent la relation de compatibilité etc.

Le problème, dont nous nous occupons, sera traité dans une autre Note pour le cas de structures métriques et presque symplectiques.

1. Soit V_{2n} une variété différentiable C^∞, douée d'une structure presque complexe définie par un champ de tenseurs F et nommée "F-structure"

$$F^i_j F^j_k = -\delta^i_k. \tag{1}$$

Cette structure détermine un automorphisme de l'espace tangent dans chaque point de V_{2n}, donné par les équations

$$u^i = F^i_j v^j. \tag{2}$$

Supposons que sur la variété V_{2n} est donné un couple ordonné de connexions (Γ, G).

Définition 1. Nous dirons que le couple (Γ, G) est *compatible* avec une F-structure si en transportant par parallélisme sur une courbe quelconque de V_{2n} un vecteur arbitraire v^j relatif à la connexion G, son immage u^i par l'automorphisme F se transporte parallélement relatif à la connexion Γ sur la même courbe.

Le couple de connexions (Γ, G) est compatible à une F-structure si la condition

$$\frac{\nabla v^{(i)}}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + G^i_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,v^k = 0$$

implique d'après (2)

$$\frac{\nabla u^i}{dt} = \frac{du^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{dt}\,u^k = 0$$

sur la courbe C.

En introduisant l'opérateur de dérivation covariante mixte par rapport au couple de connexions (Γ, G), [3], nous avons

$$\nabla_k F^i_{(j)} = \partial_k F^i_j + \Gamma^i_{k\ell} F^\ell_j - G^\ell_{kj} F^i_\ell,$$
$$\nabla_k F^{(i)}_j = \partial_k F^i_j + G^i_{k\ell} F^\ell_j - \Gamma^\ell_{kj} F^i_\ell.$$

La propriété de compatibilité s'exprime maintenant par le:

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour* (Γ, G) *soit compatible d'une F-structure sur V_{2n} est*

$$\nabla_k F^i_{(j)} = 0. \tag{3}$$

En appliquant l'opérateur de dérivation covariante mixte à l'égalité (2) le long d'une courbe C on obtient

$$\nabla_k u^i\,\frac{dx^k}{dt} = \nabla_k(F^i_j v^j)\,\frac{dx^k}{dt} = \nabla_k F^i_{(j)} v^j\,\frac{dx^k}{dt} + F^i_j \nabla_k v^{(j)}\,\frac{dx^k}{dt}\,.$$

Il résulte d'après la définition 1 la conclusion du théorème 1.

Compte tenu de (1) et des propriétés de la dérivée covariante mixte, on obtient d'après (3) le

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple* (Γ, G) *soit compatible à une F-structure est*

$$\nabla_k F^{(i)}_j = 0. \tag{4}$$

De (4) il résulte que la condition de compatibilité d'un couple (Γ, G) à une F-structure est symétrique par rapport àux connexions Γ et G.

Les équations (3) sont équivalentes à chacune des équations

$$G^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} - F^h_k \nabla_j F^k_i,\ \Gamma^h_{ji} = G^h_{ji} - F^h_k \nabla_j F^{(k)}_{(i)}. \tag{5}$$

Il en résulte le

Théorème 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le couple* (Γ, G) *soit compatible à une F-structure sur V_{2n} est que l'une des relations* (5) *soit verifiée.*

Les équations (5) donnent le:

Théorème 4. *Etant donnée une connexion affine Γ sur V_{2n} douée d'une F-structure, il existe une connexion affine G, déterminée d'une manière unique telle que le couple (Γ, G) soit compatible àvec la F-structure.*

Un couple de connexions (Γ, G) est caractérisé par la connexion moyenne γ et le tenseur de déformation τ, donnèes par

$$\gamma_{ji}^h = \frac{1}{2}(G_{ji}^h + \Gamma_{ji}^h), \quad \tau_{ji}^h = G_{ji}^h - \Gamma_{ji}^h. \tag{6}$$

Compte tennu de (5) et (6) on obtient:

$$\begin{gathered}\gamma_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h - \frac{1}{2}F_k^h \nabla_j F_i^k = G_{ji}^h - \frac{1}{2}F_k^h \nabla_j F_{(i)}^{(k)},\\ \tau_{ji}^h = -F_k^h \nabla_j F_i^k = F_k^h \nabla_j F_{(i)}^{(k)}.\end{gathered} \tag{7}$$

Remarques. 1). Des relations (7_1) il résulte que l'opérateur Φ, considéré par M. Obata [4]

$$\Phi\Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h - \frac{1}{2}F_k^h \nabla_j F_i^k$$

sstisfait à la condition

$$\Phi\Gamma_{ji}^h = \gamma_{ji}^h,$$

qui réprésente une interprétation géométrique pour cet opérateur.

2). Les formules (1) et (7_2) ont comme conséquence l'égalité

$$\tau_{jh}^h = 0.$$

A l'aide des objets géométriques γ et τ on peut donner une nouvelle caractérisation géométrique aux couples de connexions (Γ, G) compatible à une F-structure. Ainsi nous avons le:

Théorème 5. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le couple (Γ, G) soit compatible à une F-structure est que les équations*

$$^m\nabla F_j^i = 0 \quad O_{h\ell}^{ji}\tau_{kj}^\ell = 0 \tag{8}$$

soient satisfaites.

Ici $^m\nabla$ est l'opérateur de la dérivation covariante relatif à la connexion γ et $O_{h\ell}^{ji}$ est le tenseur

$$O_{h\ell}^{ji} = \frac{1}{2}(\delta_h^j \delta_\ell^i - F_h^j F_\ell^i). \tag{9}$$

Le théorème résulte des équations

$$\nabla_k F_j^{(i)} + \nabla_k F_{(j)}^i = 0, \quad \nabla_k F_j^{(i)} - \nabla_k F_{(j)}^i = 0,$$

qui sont équivalentes aux egalités (8).

Comme application, nous chercherons le cas où le couple $(\Gamma_{ji}^h, \Gamma_{ij}^h)$ est compatible à une F-structure. Parce que la connexion moyenne γ dans ce cas est la partie symétrique de la connexion Γ_{ji}^h et le tenseur de déformation τ est le tenseur de torsion de Γ_{ji}^h, il résulte d'après le théorème 5 le:

Théorème 6. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le couple* $(\Gamma_{ji}^h, \Gamma_{ij}^h)$ *soit compatible à une F-structure est que la connexion* $\frac{1}{2}(\Gamma_{ji}^h + \Gamma_{ij}^h)$ *soit une F-connexion et le tenseur de torsion* $T_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ij}^h$ *soit hybride par rapport aux indices* h, j.

Ce théorème a comme conséquence le:

Théorème 7. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une F-structure sur* V_{2n} *soit intégrable est qu'il existe une connexion* Γ_{ji}^h *qui avec sa transposée* Γ_{ij}^h *constitue un couple compatible à la F-structure.*

2. Le problème qui se pose maintenant est de déterminer une partie des objets Γ, G, F quand les autres sont donnés.

Considérons d'abord le problème de la détermination d'une F-structure compatible à un couple (Γ, G) donné. D'après (8) le problème se réduit à la détermination du tenseur F_j^i qui satisfait au système mixte:

$$(10) \qquad {}^m\nabla F_j^i = 0, \;\; \tau_{k\ell}^i F_j^\ell + \tau_{kj}^\ell F_j^i = 0, \;\; F_k^i F_j^k = -\delta_j^i,$$

dont les conséquences différentielles sont:

$$(11_1) \qquad F_j^h {}^m R_{hk\ell}^i - F_h^i {}^m R_{jk\ell}^h = 0, \;\; {}^m\nabla_\ell \tau_{kh}^i F_j^h + {}^m\nabla_\ell \tau_{kj}^h F_h^i = 0,$$

$$(11_2) \qquad F_j^h \nabla_{\ell_1} {}^m R_{kh\ell}^i - F_h^i {}^m\nabla_{\ell_1} {}^m R_{jk\ell}^h = 0, \;\; {}^m\nabla_{\ell_1} {}^m\nabla_\ell \tau_{hk}^i F_j^h + {}^m\nabla_{\ell_1} {}^m\nabla_{\ell_1} \tau_{kj}^h F_h^i = 0,$$

....

On peut formuler le

Théorème 8. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur* V_{2n} *une F-structure compatible à un couple de connexions* (Γ, G) *donné est l'existence d'un entier* N *tel que le système* (10), $(11_1 - 11_N)$ *soit compatible en* F_j^i *et sa solution vérifie les équations* (11_{N+1}).

Remarque. Le système (10) est complétement intégrable si et seulement si la connexion moyenne γ est sans courbure et le tenseur de déformation τ est covariant constant par rapport à la connexion moyenne.

Le problème de la détermination d'une F-structure sur V_{2n}, tel que le couple (Γ, G) soit compatible à la F-structure a été résolu dans le paragraphe antérieur.

Considérons maintenant le problème de la détermination de tous les couples (Γ, G) compatibles à une F-structure donnée sur V_{2n}.

Il est équivalent au problème de la détermination des objets géométriques γ et τ qui satisfont au système (8).

La première équation (8) a la solution générale [4]:

$$(12) \qquad \gamma_{ji}^h = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h - \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_j F_i^t\right) F_t^h + \frac{1}{2} O_{ir}^{sh} W_{js}^r,$$

dans laquelle W_{js}^r est un tenseur arbitraire et $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h$ une connexion quelconque.

La deuxième équation (8) a la solution générale [4]

$$(13) \qquad \tau_{ji}^h = {}^*O_{ir}^{sh} V_{js}^r,$$

où

$$
{}^*O_{ir}^{sh} = \frac{1}{2}\,(\delta_i^s\delta_r^h + F_i^s F_r^h),
$$

et V_{js}^r est un tenseur arbitraire.

En remarquant que

$$
\Gamma = \gamma - \frac{\tau}{2}, \quad G = \gamma + \frac{\tau}{2},
$$

d'après (12) et (13) nous obtenons la solution du problème dans ce cas

$$
(14) \qquad \begin{aligned}
\Gamma_{ji}^h &= \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h - \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_j F_i^s\right) F_s^h + \frac{1}{2}\, O_{ir}^{sh} W_{js}^r - \frac{1}{2}\,{}^*O_{ir}^{sh} V_{js}^r,\\
G_{ji}^h &= \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h - \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_j F_i^s\right) F_s^h + \frac{1}{2}\, O_{ir}^{sh} W_{js}^r + \frac{1}{2}\,{}^*O_{ir}^{sh} V_{js}^r.
\end{aligned}
$$

On peut donc formuler le:

Théorème 9. *Le plus général couple de connexions (Γ, G) compatible à une F-structure fixée est donné par les équations (14) où $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h$ est une connexion quelconque et V_{js}^r, W_{js}^r sont des tenseurs arbitraires.*

Remarque. Les formules (5) s'obtiennent de (14) en prenant:

$$
W_{js}^r = -V_{js}^r = (\nabla_j F_s^i) F_i^r.
$$

3. Nous nous occupons maintenant de la liaison entre deux couples de connexions compatibles à une F-structure donnée sur V_{2n}. Le théorème 7 nous montre qu'on obtient un couple de connexions (Γ, G) compatible à la F-structure donnée en précisant en (14) les objets géométriques $\overset{\circ}{\Gamma}, V, W$. Nous montrerons d'abord que sans limiter la généralité de la solution (14) on peut fixer la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h$.

En effet, si le couple (Γ, G) est déterminé d'après (14) par le triplet $\overset{\circ}{\Gamma}, V, W$ et le couple $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ par $\overset{\circ}{\overline{\Gamma}}, \overline{V}, \overline{W}$ en mettant

$$
\overset{\circ}{\overline{\Gamma}}{}_{ji}^h = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h + A_{ji}^h,
$$

nous obtenons aisément

$$
\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_j F_i^s\right) F_s^h = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_j F_i^s\right) F_s^h + {}^*O_{ir}^{\ell h} A_{j\ell}^r,
$$

et par suite

$$
\overset{\circ}{\overline{\Gamma}}{}_{ji}^h - \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\overline{\nabla}}_j F_i^s\right) F_s^h = \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h - \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_j F_i^s\right) F_s^h + O_{ir}^{\ell h} A_{j\ell}^r.
$$

Le couple (Γ, G) peut donc être considéré comme déterminé par la connexion fixée $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ji}^h$ et les tenseurs arbitraires $U_{ji}^h = \overline{V}_{ji}^h + 2A_{ji}^h$ et $\overline{W}_{ji}^h$. Il suit que tous les couples (Γ, G) compatibles à la F-structure donnée peuvent s'obtenir de (14) en considérant la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}$ fixée et les tenseurs V, W arbitraires.

Soient maintenant (Γ, G) et $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ deux couples de connexions compatibles à la F-structure donnée qui correspondent respectivement aux couples de tenseurs (V, W) et $(\overline{V}, \overline{W})$. En mettant

$$
P_{ji}^h = \overline{W}_{ji}^h - W_{ji}^h \quad Q_{ji}^h = \overline{V}_{ji}^h - V_{ji}^h,
$$

d'après (14) la liaison entre les couples (Γ, G) et $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ est donnée par

$$
(15) \qquad \begin{aligned}
\overline{\Gamma}^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \frac{1}{2} O^{sh}_{ir} P^r_{js} - \frac{1}{2} {}^*O^{sh}_{ir} Q^r_{js}, \\
\overline{G}^h_{ji} &= G^h_{ji} + \frac{1}{2} O^{sh}_{ir} P^r_{js} + \frac{1}{2} {}^*O^{sh}_{ir} Q^r_{js}.
\end{aligned}
$$

Réciproquement, si (Γ, G) est un couple de connexions compatibles à une F-structure donnée et P, Q deux tenseurs du type $(1,2)$ arbitraires, alors le couple $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ donné par (15) est aussi compatible àvec la F-structure considérée. En effet, en substituant en (15) les expressions (14) pour (Γ, G) on obtient pour le couple $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ des expressions ayant elles aussi la forme (14). Par conséquent on a le:

Théorème 10. *La plus générale transformation de couples de connexions compatibles àvec la même F-structure sur V_{2n} est donnée par les formules* (15) *dans lesquelles les tenseurs P^r_{js} et Q^r_{js} sont arbitraires.*

Remarque. A un couple de tenseurs (P^h_{ji}, Q^h_{ji}) correspond par (15) une transformation $(\Gamma, G) \longrightarrow (\overline{\Gamma}, \overline{G})$. L'ensemble de ces transformations forme un groupe $\mathcal{F}$. Considérons encore le groupe additif $\mathcal{G}$ des couples de tenseurs (P^h_{ji}, Q^h_{ji}), la somme directe du groupe additif $\mathcal{H}$ des tenseurs P^h_{ji} avec $\mathcal{H}$. Il existe alors un homomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$ défini d'une manière naturelle par les équations (15). Le noyau de cet homomorphisme est formé par les éléments (P^h_{ji}, Q^h_{ji}) de $\mathcal{G}$ qui possèdent la propriété

$$
O^{sh}_{ir} P^r_{js} = 0, \quad {}^*O^{sh}_{ir} Q^r_{js} = 0,
$$

c'est-à-dire P^r_{js} est hybride en r, s et Q^r_{js} est pur en r, s.

Des relations (15) il résulte que les formules qui donnent la transformation de la connexionn moyenne γ et du tenseur de déformation τ sont:

$$
(16) \qquad \overline{\gamma}^h_{ji} = \gamma^h_{ji} + \frac{1}{2} O^{sh}_{ir} P^r_{js}, \quad \overline{\tau}^h_{ji} = \tau^h_{ji} + {}^*O^{sh}_{ir} Q^r_{js}.
$$

Remarques. 1) La connexion moyenne γ est invariante pour les transformations (15) qui possèdent la propriété que le tenseur P^r_{js} est hybride en r et s.

2) Le tenseur de déformation τ est invariant aux transformations (15) pour lesquelles Q^r_{js} est pur en r et s.

3) L'objet géométrique ${}^*O^{i\ell}_{mh} \gamma^h_{ji}$ est un invariant du groupe (15).

4. Au point 1 on a constate qu'une F-structure et une connexion Γ étant données, on peut déterminer d'une manière unique une connexion G telle que le couple (Γ, G) soit compatible àvec la F-structure donnée. II y a alors le problème suivant:

Etant donnèes les connexions $\Gamma, \overline{\Gamma}$ et une F-structure sur V_{2n}, déterminer les connexions G, $\overline{G}$ de manière que les couples (Γ, G) et $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ soient compatibles àvec la F-structure donnée.

D'après (5) les connexions $G, \overline{G}$ sont déterminèes par les relations:

$$
(17) \qquad G^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} - F^h_k \nabla_j F^k_i, \quad \overline{G}^h_{ji} = \overline{\Gamma}^h_{ji} - F^h_k \overline{\nabla}_j F^k_i.
$$

En mettant

$$
(18) \qquad \overline{\Gamma}^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} + R^h_{ji}, \quad \overline{G}^h_{ji} = G^h_{ji} + S^h_{ji},
$$

on obtient de (17)

$$
(19) \qquad S^h_{ji} = -F^h_k R^k_{j\ell} F^\ell_i,
$$

et par suite la relation entre les couples (Γ, G) et $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ est donnée selon (18), par

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + O^{sh}_{ir} R^r_{js} + {}^*O^{sh}_{ir} R^r_{js}, \\ \overline{G}^h_{ji} &= G^h_{ji} + O^{sh}_{ir} R^r_{js} - {}^*O^{sh}_{ir} R^r_{js}. \end{aligned} \tag{20}$$

Remarques 1. Les relations (20) s'obtiennent de (15) pour

$$P^r_{js} = 2R^r_{js}, \quad Q^r_{js} = -2R^r_{js}.$$

2. Des relations (19) il résulte

$$S^h_{jh} = R^h_{jh}.$$

Pour la transformation de la connexion moyenne γ et le tenseur de déformation τ on obtient de (20)

$$\overline{\gamma}^h_{ji} = \gamma^h_{ji} + O^{sh}_{ir} R^r_{js}, \quad \overline{\tau}^h_{ji} = \tau^h_{ji} - 2^*O^{sh}_{ir} R^r_{js}. \tag{21}$$

Dans ce qui suit nous considérons quelques transformations (20) particulières qui sont H-projectives, c'est-à-dire conservent les courbes planes holomorphes données par les équations [6]:

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{ji} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} = \alpha(t) \frac{dx^h}{dt} + \beta(t) F^h_r \frac{dx^r}{dt}. \tag{22}$$

Il est connu [6] que les connexions $\overline{\Gamma}, \Gamma$ sont H-projectives si et seulement si le tenseur R^h_{ji} de ce couple a l'expression:

$$R^h_{ji} = U_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)} + P^h_{ji}, \tag{23}$$

où U_i et V_i sont des vecteurs et P^h_{ji} est un tenseur antisymétrique, arbitraires. De (20) et (23) on obtient:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + U_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)} + P^h_{ji}, \\ \overline{G}^h_{ji} &= G^h_{ji} + \frac{1}{2}\left(U_j\delta^h_i + \overline{V}_i\delta^h_j + V_jF^h_i - \overline{U}_iF^h_j\right) - P^k_{j\ell}F^h_kF^\ell_i, \end{aligned} \tag{24}$$

où $\overline{U}_i = F^h_i U_h$ et $\overline{V}_i = F^h_i V_h$.

On remarque que la transformation $G \longrightarrow \overline{G}$ donnée par (24_2) n'est pas en général H-projective.

Considérons maintenant quelques cas dans lesquels la transformation $G \longrightarrow \overline{G}$ est aussi H-projective.

a) Supposons que toutes les quatre connexions de (24) sont symétriques et que le couple $(\Gamma, \overline{\Gamma})$ est H-projectif:

Alors de (24) il résulte

$$P^h_{ji} = 0 \quad U_i = \overline{V}_i$$

et par suite les relations (24) prennent la forme

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \overline{V}_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)}, \\ \overline{G}^h_{ji} &= G^h_{ji} + \overline{V}_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Nous avons donc le:

Théorème 11. *Si les couples* (Γ, G) *et* $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ *de connexions symétriques sont compatibles àvec la même* F*-structure sur* V_{2n} *et les connexions* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *sont H-projectives, alors les connexions* $G, \overline{G}$ *sont aussi H-projectives. Dans ce cas les connexions moyennes* $\gamma, \overline{\gamma}$ *sont des F-connexions symétriques et H-projectives et le tenseur de déformation* τ *est invariant.*

b) Considérons maintenant le cas où les connexions $\Gamma, \overline{\Gamma}, G, \overline{G}$ ont les tenseurs de torsion purs en l'indice supérieur et un indice inférieur et le couple $(\Gamma, \overline{\Gamma})$ est H-projectif. II en résulte

$$^*O^{sh}_{ir} P^r_{js} = 0, \quad U_i = \overline{V}_i,$$

et par suite les relations (24) deviennent

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \overline{V}_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)} + P^h_{ji}, \\ \overline{G}^h_{ji} &= G^h_{ji} + \overline{V}_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)} + P^h_{ji}. \end{aligned} \tag{26}$$

On en obtient le:

Théorème 12. *Si les couples de connexions* (Γ, G) *et* $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ *avec les tenseurs de torsion purs dans l'indice supérieur et dans un indice inférieur, sont compatibles àvec la même* F*-structure et le couple* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *est H–projecttf, alors le couple* $G, \overline{G}$ *est aussi H-projectif. Dans ce cas les connexions moyennes* $\gamma, \overline{\gamma}$ *sont des F-connexions H-projectives avec le même tenseur de torsion pur et le tenseur de déformation* τ *est invariant.*

c) Considérons enfin le cas où les connexions $\Gamma, \overline{\Gamma}, G, \overline{G}$ de (24) ont les tenseurs de torsion hybrides dans l'indice supérieur et dans un indice inférieur et le couple $\Gamma, \overline{\Gamma}$ est H-projectif. Il résulte alors de (24)

$$O^{sh}_{ir} P^r_{js} = 0, \quad U_i = \overline{V}_i,$$

et les transformations (24) prennent la forme

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^h_{ji} &= \Gamma^h_{ji} + \overline{V}_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)} + P^h_{ji}, \\ \overline{G}^h_{ji} &= G^h_{ji} + \overline{V}_{(j}\delta^h_{i)} + V_{(j}F^h_{i)} - P^h_{ji}. \end{aligned} \tag{27}$$

Il en résulte le:

Théorème 13. *Si les couples* (Γ, G) *et* $(\overline{\Gamma}, \overline{G})$ *de connexions avec les tenseurs de torsion hybrides dans l'indice supérieur et dans un indice inférieur, sont compatibles àvec la même* F*-structure sur* V_{2n} *et le couple* $(\Gamma, \overline{\Gamma})$ *est H-projectif alors le couple* $(G, \overline{G})$ *est aussi H-projectif. Dans ce cas les connexions moyennes* $\gamma, \overline{\gamma}$ *sont des F-connexions H-projectives avec les tenseurs de torsion hybrides et égaux et le tenseur de deformation à la partie symétrique invariante.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Cruceanu V., *Asupra geometriei centro-afine a varietăţilor neolonome* V_n^{n-1}. Analele ştiinţifice ale Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi 1966, pp. 453-464.
2. Miron R., *Sur les espaces à connexions conjuguées au sens de Norden*, Analele ştiinţifice ale Univ. "Al.I. Cuza" Iaşi, 1963, pp. 445-454.
3. Norden A.P., *Über Paare conjugierten Paralleläbertragungen*, Trudy sem. vekt. i tens. analizî, 4 (1937) str. 205-355.
4. Obata M., *Affine connexions on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure.* Jap. J. Math., 26 (956) pp.43-77.
5. Okada T., *Theory of pair connexions.* Sci. Eng. R. Dosbisba Univ. 5, 1964 pp. 133-152.
6. Yano K., *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces.* Pergamon Press, 1955.