9 Teoria hipersuprafeţelor în spaţii cu conexiune centro-afină

An. Univ. Timişoara,
Seria Matematică, vol. VI, 1968, 129-143.

In lucrarea de faţă continuăm studiul hipersuprafeţelor scufundate în spaţii cu conexiune centro-afină, început în Nota [2].

1. Hipersuprafeţe în spaţii cu conexiune centro-afină.

Fie C_n o varietate diferenţiabilă dotată cu o conexiune centro-afină normală [1], reprezentată în coordonate locale prin câmpul de vectori $\xi^\alpha(x)$ şi conexiunea liniară $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$, legate prin condiţia

$$\nabla_\beta \xi^\alpha = \delta^\alpha_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1.2, ...n). \tag{1}$$

Fiecărui punct $M \in C_n$ îi asociem în sistemul de coordonate locale considerat reperul centro-afin $(O; \overrightarrow{E}_a)$ şi coreperul centro-afin dual $(\Omega; \underset{\rightarrow}{E_a})$, unde O şi Ω sunt respectiv, centrul şi hiperplanul de la infinit ale spaţiului centro-afin tangent în M la C_n , iar $(\overrightarrow{E}_a)$ şi $(\underset{\rightarrow}{E_a})$ sunt bazele naturale corespunzătoare în spaţiile vectoriale tangente T_M şi T^*_M. Prin desfăşurarea lui C_n de-a lungul unei curbe $\Gamma \subset C_n$, pe spaţiul centro-afin tangent într-un punct M al acestei curbe. reperele $(O; \overrightarrow{E}_a)$ şi $(\Omega; \underset{\rightarrow}{E_a})$ vor fi reprezentate respectiv prin reperele $(O; \vec{e}_a)$ şi $(\Omega; \underset{\rightarrow}{e}_a)$ care satisfac ecuaţiile de mişcare

$$d\vec{0} = \vec{0},\ d\vec{e}_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha \vec{e}_\gamma,\ d\underset{\rightarrow}{\Omega} = \underset{\rightarrow}{0},\ d\underset{\rightarrow}{e}^\beta = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} dx^a \underset{\rightarrow}{e}^\gamma. \tag{2}$$

Fie acum Σ o hipersuprafaţă scufundată regulat în C_n şi reprezentată în coordonate locale prin ecuaţiile

$$x^\alpha = x^\alpha(u^a),\ (a, b, c = 1, 2...., n-1), \tag{3}$$

unde funcţiile $x^\alpha(u^a)$ sunt regulate de clasa necesară şi satisfac în plus condiţia că vectorii $x^\alpha_a = \partial_a x^\alpha$ şi ξ^α sunt liniar independenţi în fiecare punct $M \in C_n$.

Asociem apoi fiecărui punct $M \in \Sigma$ în coordonatele locale considerate reperul centro-afin $(O; x^a_a, \xi^a)$ căruia îi corespunde coreperul dual $(\Omega; x^a_\alpha, \xi_a)$ definit prin

$$x^a_\alpha x^\alpha_b = \delta^a_b,\ x^a_\alpha \xi^\alpha = 0,\ \xi_\alpha x^\alpha_a = 0,\ \xi_\alpha \xi^\alpha = 1. \tag{4}$$

Prin urmare, în reperele centro-afine naturale ale lui C_n un punct $M \in \Sigma$ este reprezentat prin vectorul ξ^a iar hiperplanul Π, tangent în M la Σ, prin covectorul ξ_a.

Condiţia (1) ne dă

$$\nabla_a \xi^\alpha = x_a^\alpha \tag{5}$$

de unde, ţinând seama de (4), rezultă

$$\nabla_a \xi^\alpha \xi_\alpha = 0, \ \nabla_a \xi_\alpha \xi^a = 0. \tag{6}$$

Pentru o hipersuprafaţă $\Sigma \subset C_n$ obţinem o normalizare naturală luând ca vector normal în fiecare punct M al acesteia, vectorul $\vec{\xi} = \overrightarrow{OM}$. Putem apoi defini tensorul asimptotic de specia întâia h_{ab} şi conexiunea indusă de specia întâia Γ_{ab}^c prin expresiile

$$h_{ab} = -\nabla_a \xi_\alpha x_b^\alpha \text{ şi } \Gamma_{ab}^c = (\partial_a x_c^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma x_a^\alpha x_b^\beta) x_\gamma^c. \tag{7}$$

De aici obţinem pentru funcţiile x^α şi x_a^α sistemul de ecuaţii fundamentale

$$D_a x^\gamma = \partial_a x^\gamma = x_a^\gamma, \ D_a x_b^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma x_a^\alpha x_b^\beta - \Gamma_{ab}^c x_c^\gamma = h_{ab} \xi^\gamma, \tag{8}$$

ale carui condiţii de integrabilitate şi teorema de existenţă au fost date în [2].

Prin dualitate putem asocia hipersuprafeţei Σ conormalizare definită în fiecare punct $M \in \Sigma$ de covectorul $\underset{\rightarrow}{\xi} = \Omega\Pi$. Presupunând tensorul h_{ab} nedegenerat, rezultă că ansamblul $(\Omega; \nabla_a \xi_\alpha, \xi_\alpha)$ constituie un coreper centro-afin în M, căruia îi corespunde reperul reciproc $(O; \xi^{a\alpha} = -h^{ab} x_b^\alpha, \xi^a)$. Definim apoi tensorul asimptotic de specia a doua $\bar{h}_{ab}$ şi conexiunea indusă de specia a doua $\overline{\Gamma}_{ab}^c$ prin formulele

$$\bar{h}_{ab} = -\nabla_a \xi^\alpha \nabla_b \xi_\alpha \text{ şi } \overline{\Gamma}_{ab}^c = [\partial_a(\nabla_b \xi_\gamma) - \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta x_a^\alpha \nabla_b \xi_\beta] \zeta^{c\gamma}. \tag{9}$$

Aceste relaţii se mai pot scrie sub forma echivalentă

$$\bar{h}_{ab} = h_{ba} \text{ şi } \overline{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c + h^{ce} \nabla_a h_{be}. \tag{10}$$

2. Hipercuadrice osculatoare.

O hipercuadrică, dată în spaţiul centroafin tangent într-un punct M al hipersuprafeţei Σ este osculatoare hipersuprafeţei în acest punct, dacă are contact de ordinul doi cu imaginea γ a oricărei curbe Γ de pe hipersuprafaţa care trece prin M, în harta spaţiului C_n pe spaţiul centro-afin tangent în M, de-a lungul curbei Γ.

Pentru a găsi hipercuadricele osculatoare procedăm în felul următor.

Considerăm o curbă Γ pe hipersuprafaţă, care trece prin punctul M, dată prin ecuaţiile

$$u^a = u^a(t), \ 0 \le t \le 1, \tag{11}$$

unde funcţiile $u^a(t)$ sunt diferenţiabile de clasa necesară şi presupunem că punctul M corespunde la $t = 0$. Făcând harta spaţiului C_n de-a lungul curbei Γ pe spaţiul centro-afin tangent în M, imaginea curbei Γ va fi o curbă reprezentată faţă de reperele $(O, \vec{e}_a)$ prin ecuaţiile

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha[x^\beta(u^a(t))]. \tag{12}$$

Dezvoltând funcţiile ξ^α după formula lui Taylor în vecinătatea lui $t = 0$ obţinem

$$\begin{aligned} \xi^\alpha = \xi_0^\alpha + \left(\frac{du^a}{dt}\, x_a^\alpha\right)_0 t + (\lambda^\alpha x_a^\alpha + \mu\xi^\alpha)_0\, \frac{t^2}{2} + \\ + \left[\left(\frac{\nabla\lambda^a}{dt} + \mu\,\frac{du^a}{dt}\right) x_a^\alpha + \left(h_{ab}\lambda^a\,\frac{du^b}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\right)\xi^\alpha\right]_0 \frac{t^3}{6} + (4), \end{aligned} \tag{13}$$

unde am pus

$$\lambda^a = \frac{\nabla^2 u^a}{dt^2}, \quad \mu = h_{ab}\,\frac{du^a}{dt}\,\frac{du^b}{dt}.$$

Considerând o hipercuadrică în spaţiul centro-afin tangent în M, dată prin ecuaţia

$$g_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta + 2g_{0\alpha}\eta^\alpha + g_{00} = 0 \tag{14}$$

şi impunând condiţia ca ea să aibă contact de ordinul cel puţin doi în acest punct cu imaginea oricărei curbe Γ de pe hipersuprafaţă, care trece prin M, obţinem din (13), omiţând indicele zero, relaţiile

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta + 2g_{0\alpha}\xi^\alpha + g_{00} = 0, \\ g_{\alpha\beta}\xi^\alpha x_a^\beta = g_{0\alpha} x_a^\alpha = 0, \\ g_{\alpha\beta}x_a^\alpha x_b^\beta - h_{(ab)}(g_{0\alpha}\xi^\alpha + g_{00}) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Punând apoi

$$\begin{aligned} g_{0\alpha} &= A_a x_\alpha^a + B\xi_\alpha, \\ g_{\alpha\beta} &= C_{ab}x_\alpha^a x_\beta^b + E_a(x_\alpha^a\xi_\beta + x_\beta^a\xi_\alpha) + F\xi_\alpha\xi_\beta \end{aligned} \tag{16}$$

obţinem, înlocuind în (15) şi ţinând seama de (4), relaţiile

$$\begin{aligned} & g_{00} + 2B + F = 0, \\ & E_a + A_a = 0, \\ & C_{ab} - h_{(ab)}(B + g_{00}) = 0. \end{aligned}$$

Considerând cazul general, putem norma coeficienţii hipercuadricei punând

$$B + g_{00} = 1.$$

Făcând apoi notaţia

$$B = -2E_n,$$

obţinem pentru coeficienţii ecuaţiei hipercuadricelor osculatoare expresiile

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + 2E_n, \\ g_{0a} &= -E_a x_\alpha^a - 2E_n\xi_\alpha, \\ g_{\alpha\beta} &= h_{(ab)}x_\alpha^a x_\beta^b + E_a(x_\alpha^a\xi_\beta + x_\beta^a\xi_\alpha) + (2E_n - 1)\xi_\alpha\xi_\beta. \end{aligned} \tag{17}$$

De aici rezultă că familia hipercuadricelor, osculatoare hipersuprafeţei într-un punct M al ei, depinde de n parametri arbitrari. In această familie există o singura hipercuadrică cu centrul în centrul spaţiului centro-afin tangent în M şi ea se obţine pentru

$$E_a = E_n = 0. \tag{18}$$

O vom numi *hipercuadrica osculatoare centrală* sau *hipercuadrica lui Mayer* şi o vom nota cu $\mathcal{M}$.

Punând

$$\eta^a = y^a x_a^\alpha + y^n \xi^\alpha,$$

obţinem pentru hipercuadrica lui Mayer, ecuaţia

$$\mathcal{M} \equiv h_{(ab)} y^a y^b - (y^n)^2 + 1 = 0, \tag{19}$$

iar pentru familia tuturor hipercuadricelor osculatoare

$$\mathcal{M} + 2[E_a y^a + E_n(y^n - 1)](y^n - 1) = 0. \tag{20}$$

In aceasta familie exista o singură hipercuadrică care trece prin centrul spaţiului centro-afin tangent în M şi ea se obţine pentru

$$E_n = -\frac{1}{2}.$$

Impunând condiţia ca imaginea unei curbe Γ să aiba contact de ordin cel puţin trei cu o hipercuadrică osculatoare, obţinem din (13) şi (20) condiţia

$$h_{[ab]} \frac{du^a}{dt} \lambda^b + (\nabla_c h_{(ab)} - 3E_a h_{(bc)} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} \frac{du^c}{dt} = 0, \tag{21}$$

Dacă hipersuprafaţa se bucură de proprietatea că tensorul h_{ab} este simetric, ceea ce se întâmplă întotdeauna dacă spaţiul C_n este fără torsiune [2], ecuaţia (21) se reduce la

$$(\nabla_c h_{ab} - 3E_a h_{bc}) \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} \frac{du^c}{dt} = 0. \tag{22}$$

In acest caz, pentru fiecare fascicul de hipercuadrice osculatoare obţinut prin fixarea parametrilor E_a există un hipercon de direcţii tangente astfel încât imaginile în hartă ale curbelor de pe hipersuprafaţă, tangente acestui hipercon în M, să aibă cu o hipercuadrică a fasciculului contact de ordin cel puţin trei.

Să determinăm acum fasciculul de hipercuadrice osculatoare pentru care conul (22) este apolar cu conul direcţiilor asimptotice. Considerând tensorul

$$h_{abc} = -\frac{1}{2} \nabla_{(a} h_{bc)} \tag{23}$$

pe care-l numim *al doilea tensor fundamental* sau *tensorul lui Mayer*, condiţia de apolaritate se scrie sub forma

$$h^{ab} \left(h_{abc} + \frac{3}{2} E_{(a} h_{bc)} \right) = 0$$

de unde rezultă

$$E_c = -\frac{2}{n+1} h^{ab} h_{abc}.$$

Introducând vectorul

$$h_c = \frac{2}{n+1} h^{ab} h_{abc} \tag{24}$$

obţinem

$$E_a = -h_a.$$

Hipercuadricele osculatoare astfel obţinute formează fasciculul

$$\mathcal{M} - 2[h_a y^a - E_n(y^n - 1)](y^n - 1) = 0 \tag{25}$$

pe care-l numim *fasciculul hipercuadricelor lui Darboux.*

Dacă tensorul h_{ab} nu este simetric, ecuaţia diferenţială (21) este de ordinul doi şi deci prin fiecare punct şi direcţie tangentă la hipersuprafaţă în acel punct trece o infinitate de curbe, ale căror imagini în hartă să aibă contact de ordinul trei cu o hipercuadrică osculatoare dată.

3. Forme diferenţiale fundamentale.

Vom asocia unei hipersuprafeţe în spaţiul cu conexiune centro-afină trei forme diferenţiale fundamentale. Avem mai întâi forma

$$\Phi = h_{ab} du^a du^b \tag{26}$$

pe care o numim *prima formă fundamentală a hipersuprafeţei* şi pentru care avem următoarea interpretare geometrică. Considerăm un punct M al hipersuprafeţei, o curbă Γ care trece prin M şi pe aceasta un punct vecin M'. Făcând harta spaţiului C_n pe spaţiul centro-afin tangent în M, curba Γ se transformă în curba γ dată de ecuaţia (13). Punctului M' îi va corespunde pe γ punctul m'. Dreapta Om' va tăia hiperplanul tangent în M într-un punct m_1. Punând

$$h = \frac{Om'}{Om_1}$$

obţinem pentru punctul m_1 coordonatele

$$\eta_1^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{h}.$$

Impunând condiţia ca punctul m_1 să se găsească în hiperplanul tangent în M, obţinem

$$h = 1 + \frac{1}{2}\, h_{ab} du^a du^b + (3).$$

Deci

$$\frac{m_1 m'}{Om_1} = h - 1 = \frac{\Phi}{2} + (3)$$

şi prin urmare

$$\Phi = p \cdot pr \cdot 2\, \frac{m_1 m'}{Om_1}\,. \tag{27}$$

Direcţiile tangente hipersuprafeţei într-un punct al ei, care anulează prima formă fundamentală, determină în spaţiul tangent un con pătratic numit *conul asimptotic* pe care l-am întâlnit deja în paragraful precedent. Curbele hipersuprafeţei tangente în fiecare punct conului asimptotic prin acel punct se numesc *linii asimptotice* şi ele se caracterizează prin proprietatea că imaginile lor în harta pe spaţiul tangent au contact de ordinul doi cu hiperplanul tangent în acel punct, aşa cum rezultă din consideraţiile precedente.

Forma

$$\Psi = h_{abc} du^a du^b du^c \tag{28}$$

o numim *a doua formă fundamentală* sau *forma lui Mayer.* Pentru a găsi semnificaţia ei geometrică, în cazul când tensorul asimptotic este simetric, considerăm în punctul M al hipersuprafeţei, o curbă $\Gamma \subset \Sigma$ şi imaginea γ a acesteia în hartă. Unui punct M' pe Γ vecin cu M îi va corespunde în hartă un punct m' pe γ. Fie n_1 punctul vecin cu M în care dreapta Om' taie hipercuadrica lui Mayer prin M. Punând

$$k = \frac{Om'}{On_1},$$

din condiţia ca n_1 să se găsească pe hipercuadrica lui Mayer, în vecinătatea lui M, obţinem

$$k = 1 - \frac{1}{3}\, h_{abc} du^a du^b du^c + (4).$$

De aici rezultă

$$\frac{m'm_1}{On_1} = 1 - k = \frac{1}{3}\, \Psi + (4)$$

şi deci

$$\Psi = p \cdot pr \cdot 3\, \frac{m'm_1}{On_1}. \tag{29}$$

Direcţiile tangente hipersuprafeţei într-un punct al ei, care anulează forma a doua fundamentală determină conul de ordinul trei numit *conul lui Mayer.* Curbele de pe hipersuprafaţă, tangente în fiecare punct al lor conului lui Mayer prin acel punct, se numesc *liniile lui Mayer.* 0 astfel de linie se caracterizează (când $h_{[ab]} = 0$) prin proprietateta că imaginea ei, în harta spaţiului C_n pe spaţiul tangent într-un punct oarecare al ei, are contact de ordinul trei cu hipercuadrica lui Mayer prin acel punct.

In sfârşit, forma

$$\chi = \Psi - \frac{3}{2}\, (h_a du^a)\Phi \tag{30}$$

se numeşte *a treia formă fundamentală a hipersuprafeţei* sau *forma lui Fubini.* Curbele hipersuprafeţei care satisfac ecuaţia diferenţială obţinută anulând forma lui Fubini se numesc *liniile lui Darboux.* Pentru $h_{[ab]} = 0$, o linie Darboux se caracterizează prin proprietatea că imaginea ei, în harta spaţiului C_n pe spaţiul tangent într-un punct al ei, are contact de ordinul trei cu fiecare din hipercuadricele 1ui Darboux prin acel punct.

4. Fascicule canonice.

Considerăm din familia hipercuadricelor osculatoare (20) un fascicul obţinut punând

$$E_a = -\lambda h_a, \tag{31}$$

unde λ este o constantă oarecare. Locul centrelor hipercuadricelor acestui fasscicul este dreapta dată de ecuaţiile

$$h_{(ab)} y^a - \lambda h_b (y^n - 1) = 0, \tag{32}$$

pe care o numim *dreapta canonică* sau *normala de specia I-a şi indice* λ. Fiecărui punct M al hipersuprafeţei putem să-i asociem astfel ∞^1 drepte canonice de specia I-a care trec toate prin M şi formează un fascicul numit *fasciculul canonic de specia I-a.* In adevăr, eliminând λ din ecuaţiile (32) obţinem sistemul

$$\frac{y^1}{k^1} = \frac{y^2}{k^2} = \cdots = \frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} \tag{33}$$

unde

$$k^b = h_a k^{ab}, \tag{34}$$

iar k^{ab} este reciprocul tensorului $h_{(ab)}$. Sistemul (33) reprezintă însă un plan în spaţiul tangent în M la C_n pe care-l numim *planul canonic de specia I-a.* El taie hiperplanul tangent hipersuprafeţei în M după o dreptă a cărei direcţie este dată de vectorul (34) şi pe care o numim *tangenta canonică de specia I-a.*

Pentru $\lambda = 0$, ecuaţia (32) ne dă drepta OM iar pentru $\lambda = 1$ ne dă dreapta centrelor hipercuadricelor lui Darboux, adică *normala afină.*

Ca vector director pentru normala de indice λ vom considera vectorul

$$n^\alpha(\lambda) = \lambda k^a x_a^\alpha + \xi^\alpha \tag{35}$$

care are următoarea interpretare geometrică. Este vectorul paralel cu normala de indice λ care aplicat în centrul O al spaţiului tangent are extremitatea într-un punct $N(\lambda)$ situat pe tangenta canonică de specia I-a. De aici rezultă de asemenea următoarea semnificaţie geometrică pentru parametrul λ

$$\lambda = \frac{MN(\lambda)}{MN(1)}. \tag{36}$$

Hiperplanele polare centrului O al spaţiului tangent faţă de hipercuadricele fasciculului (31) formează un fascicul a cărui axă este planul cu $n-2$ dimensiuni sau hiperdreapta de ecuaţii

$$\lambda h_a y^a + 1 = 0, \; y^n - 1 = 0. \tag{37}$$

Această hiperdreaptă este situată în hiperplanul tangent în M la Σ şi vom numi *hiperdreapta canonică* sau *hipernormala de specia a II-a şi indice* λ. Ansamblul acestor hipernormale formează un fascicul de hiperdrepte paralele cu hiperdreapta din hiperplanul tangent care trece prin M şi are direcţia dată de covectorul h_a. Pe aceasta o vom numi *hipertangenta canonică de specia a II-a.* Ea are ecuaţiile

$$h_a y^a = 0, \; y^n - 1 = 0. \tag{38}$$

Fasciculul hipernormalelor de specia a II-a îl numim *fasciculul canonic de specia a II-a.* Pentru $h_{[ab]} = 0$, se constată uşor că tangenta canonică este conjugata hipertangentei canonice.

Din ecuaţiile (37), pentru $\lambda = 0$, obţinem hiperdreapta $\Omega\Pi$ de intersecţie a hiperplanului tangent Π cu hiperplanul de la infinit, iar pentru $\lambda = 1$ obţinem axa fasciculului de hiperplane polare centrului o faţă de fasciclul hipercuadricelor lui Darboux, adică *hipernormala centro-proiectivă.*

Drept covector director pentru hipernormala de specia a II-a şi indice λ putem lua covectorul

$$n_\alpha(\lambda) = h_a x_\alpha^a + \xi_\alpha \tag{39}$$

pentru care avem următoarea interpretare geometrică. Este covectorul "paralel" cu hipernormala de indice λ care aplicat în hiperplanul de la infinit (adică luând acesta ca hiperplan de origine) are ca extremitate un hiperplan $\nu(\lambda)$ ce trece prin hipertangenta canonică de specia a II-a. In adevăr, hiperplanul extremitate a covectorului $n_\alpha(\lambda)$ este dat de ecuaţia

$$n_\alpha(\lambda)y^\alpha = 1$$

sau

$$\lambda h_a y^a + y^n = 1.$$

Intersectând acest hiperplan cu hiperplanul tangent obţinem tocmai hipertangenta canonică. Cu această ocazie obţinem şi pentru λ următoarea semnificaţie geometrică

$$\lambda = \frac{\Pi\nu(\lambda)}{\Pi\nu(1)}. \tag{40}$$

Se poate constata uşor că normalele de specia I-a şi de specia a II-a corespunzătoare aceluiaşi indice λ se corespund în polaritatea faţă de hipercuadrica $\mathcal{M}^*$ de ecuaţie

$$h_{(ab)}y^a y^b + (y^n)^2 - 1 = 0. \tag{41}$$

5. Linii de curbură.

Fie Γ o curbă pe hipersuprafaţa Σ şi γ imaginea ei în harta spaţiului C_n de-a lungul curbei Γ pe spaţiul tangent într-un punct al acesteia. Vom spune că curba Γ este *linie de curbură de specia I-a şi indice* λ dacă direcţiile normale de specia I-a şi indice λ, date de vectorii $n^\alpha(\lambda)$ sunt *înfăşuratoare în sens Myller* [9], [3] de-a lungul ei, adică, dacă în hartă, normalelor considerate le corespund drepte prin punctele curbei γ care să fie tangente unei curbe γ^*. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca pe dreapta

$$\vec{\eta}(\lambda, t) = \vec{\xi}(t) + \rho\vec{n}(\lambda, t), \tag{42}$$

unde

$$\vec{\xi} = \xi^\alpha \vec{e}_\alpha \text{ şi } \vec{n} = n^\alpha \vec{e}_\alpha, \tag{43}$$

sa existe un punct $m(t)$ care să descrie o curba γ^+, astfel ca tangenta ei în punctul $m(t)$ să coincidă cu dreapta (42). Trebuie deci să existe doua funcţii $\rho(t)$ şi $\alpha(t)$ astfel încât să avem

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\xi}(t) + r(t)\vec{n}(\lambda, t)\right) = \alpha(t)\vec{n}(\lambda, t).$$

Ţinând seama de ecuaţiile (2) şi (43), obţinem

$$\frac{\nabla\xi^\alpha}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\,n^\alpha + \rho\,\frac{\nabla n^a}{dt} = \alpha n^\alpha,$$

de unde rezultă

$$\alpha = \frac{d\rho}{dt} + \rho\lambda h_{cb}\,\frac{du^c}{dt}\,k^b,$$

$$\alpha\lambda k^a = \rho\lambda\,\frac{\nabla k^a}{dt} + \rho\,\frac{du^a}{dt} = \lambda k^a\,\frac{d\rho}{dt} + \frac{du^a}{dt}\,.$$

Eliminând din aceste relaţii pe α obţinem

(44) $$(\rho A^a_c(\lambda) + \delta^a_c)du^c = 0,$$

unde am pus

(45) $$A^a_c(\lambda) = \lambda\nabla_c k^a - \lambda^2 h_{cb}k^a k^b + \delta^a_c.$$

Sistemul (44) admite soluţii în du^c diferite de cea banală dacă şi numai dacă ρ satisface ecuaţia

(46) $$|\rho A^a_c(\lambda) + \delta^a_c| = 0.$$

Prin urmare dacă această ecuaţie admite $n-1$ rădăcini distincte ρ_a prin fiecare punct al hipersuprafeţei trec câte $n-1$ linii de curbură de specia I-a şi indice λ. Pentru $\lambda = 1$ se obţin liniile de curbură afine.

Punctele $M_a(\lambda)$ de pe normala de specia I-a şi indice λ date de vectorii

$$\eta^\alpha_a(\lambda) = \xi^\alpha + \rho_a(\lambda)n^\alpha(\lambda)$$

le numim *centre de curbură de specia I-a şi indice* λ iar punctul $M(\lambda)$ de vector

$$\eta^\alpha(\lambda) = \xi^\alpha + \rho(\lambda)n^\alpha(\lambda)$$

unde

$$\frac{1}{\rho(\lambda)} = \frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{\rho_a(\lambda)} = -\frac{A^a_a}{n-1},$$

îl numim *centru de curbură medie de specia I şi indice* λ. Avem relaţia

$$\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n-1}\frac{MM(\lambda)}{MM_a(\lambda)} = 1.$$

Prin consideraţii duale putem defini şi linii de curbură de specia a II-a în felul următor. Vom numi *linie de curbură de specia a II-a şi indice* λ o curbă Γ de pe hipersuprafaţa Σ pentru care hipernormalele de specia a II-a şi indice λ sunt înfăşurătoare în sens Myller de-a lungul ei, adică în harta spaţiului C_n acestor hipernormale le corespund hiperdrepte situate în hiperplanele π, imaginile hiperplanelor Π tangente de-a lungul curbei Γ la Σ care să fie hipertangente unei hipersuprafeţe desfăşurabile. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca prin hiperdreapta

(47) $$\underset{\rightarrow}{\eta}(\lambda, t) = \underset{\rightarrow}{\xi}(t) + \sigma\underset{\rightarrow}{n}(\lambda, t),$$

unde

(48) $$\underset{\rightarrow}{\xi} = \xi_\alpha \underset{\rightarrow}{e}^\alpha \text{ şi}$$
$$\underset{\rightarrow}{n} = n_\alpha \underset{\rightarrow}{e}^\alpha,$$

să treacă un hiperplan $\pi^*(t)$ care să înfăşoare o hipersuprafaţă desfăşurabila astfel încât caracteristica ei situată în hiperplanul $\pi^*(t)$ să coincidă cu hiperdreapta (47). Trebuie deci să existe doua funcţii $\sigma(t)$ şi $\beta(t)$ astfel încât să aibă loc relaţia

$$\frac{d}{dt}\left[\underset{\rightarrow}{\xi}(t) + \sigma(t)\underset{\rightarrow}{n}(t)(\lambda, t)\right] = \beta(t)\underset{\rightarrow}{n}(\lambda, t),$$

care, ţinând seama de (2) şi (48), este echivalentă cu

$$\frac{\nabla \xi_a}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}\, n_\alpha + \sigma\, \frac{\nabla n_a}{dt} = \beta n_\alpha.$$

De aici rezultă

$$\beta = \frac{d\sigma}{dt} - \lambda\sigma h_a\, \frac{du^a}{dt},$$

$$\lambda\beta h_b = \sigma\lambda\, \frac{\nabla h_b}{dt} - \sigma h_{ab}\, \frac{du^a}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}\, \lambda h_b - h_{ab}\, \frac{du^a}{dt}$$

şi eliminând pe β obţinem

(49) $$(\sigma B_{ab}(\lambda) + h_{ab})du^a = 0,$$

unde

(50) $$B_{ab}(\lambda) = -\lambda\nabla_a h_b - \lambda^2 h_a h_b + h_{ab}.$$

Sistemul (49) admite soluţii nebanale în du^a dacă şi numai dacă σ satisface ecuaţia

(51) $$|\sigma B_{ab}(\lambda) + h_{ab}| = 0.$$

Dacă această ecuaţie are $n-1$ soluţii distincte $\sigma^a(\lambda)$, atunci ecuaţiile (49) ne dau prin fiecare punct al hipersuprafeţei câte $n-1$ linii de curbură de specia a II-a şi indice λ. Pentru $\lambda = 1$ obţinem liniile de curbură centroproiective.

Hiperplanele $\Pi(\lambda)$ care trec prin hipernormala de specia a II -a şi indice λ, date de covectorii

$$\eta^a_\alpha(\lambda) = \xi_\alpha + \sigma^a(\lambda) n_\alpha(\lambda)$$

le numim *hiperplane de curbură de specia a I-a şi indice* λ. Hiperplanul $\Pi(\lambda)$ dat de covectorul

$$\eta_\alpha(\lambda) = \xi_\alpha + \sigma(\lambda) n_\alpha(\lambda)$$

unde

$$\frac{1}{\sigma(\lambda)} = \frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma^a(\lambda)} = -\frac{B^a_a}{n-1},$$

îl numim *hiperplanul curburii medii de specia a II-a şi indice* λ. Avem relaţia

$$\frac{1}{n-1}\sum_{a=1}^{n-1} \frac{\Pi\Pi(\lambda)}{\Pi\Pi_a(\lambda)} = 1.$$

6. Fascicule de conexiune.

Cele două fascicute de normale ne vor permite să definim două fascicule de conexiuni pe hipersuprafaţă.

Vom numi *conexiune de specia I-a şi indice* λ, conexiunea indusă de conexiunea spaţiului ambiant prin intermediul normalei de specia I-a şi indice λ. Pentru a găsi expresia acestei conexiuni procedăm în felul următor. Ansamblul vectorilor $(x^\alpha_a, n^\alpha(\lambda))$ determină în general un reper în fiecare punct $M \in \Sigma$ căruia îi corespunde reperul reciproc $(x^a_\alpha(\lambda), \xi_\alpha)$ unde

$$x^a_\alpha(\lambda) = x^a_\alpha - \lambda k^a \xi_\alpha. \tag{52}$$

Atunci conexiunea de specia I-a şi indice λ va fi dată de coeficienţii

$$\Gamma^c_{ab}(\lambda) = (\partial_a x^\gamma_b + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} x^\alpha_a x^\beta_b) x^c_\gamma(\lambda) \tag{53}$$

Ţinând seama de (4) şi (52) obţinem pentru aceşti coeficienţi expresia

$$\Gamma^c_{ab}(\lambda) = \Gamma^c_{ab} - \lambda h_{ab} k^c. \tag{54}$$

- Pentru $\lambda = 0$ obţinem conexiunea indusă de normala OM iar pentru $\lambda = 1$, conexiunea indusă de normala afină.

- Dacă spaţiul C_n este fără torsiune, Γ^c_{ab} h_{ab} fiind simetrici rezultă că toate conexiunile de specia I-a sunt simetrice.

In acelaşi mod se definesc şi conexiunile de specia a II-a.

Numim *conexiune de specia a II-a şi indice* λ, conexiunea indusă pe hipersuprafaţă de conexiunea spaţiului C_n prin intermediul hipernormalei de specia a II-a şi indice λ. Pentru a găsi expresia acestei conexiuni considerăm coreperul $(\nabla_a \xi_\alpha, n_a(\lambda))$ căruia îi corespunde reperul reciproc $(\zeta^{a\alpha}(\lambda), \xi^\alpha)$, unde

$$\zeta^{a\alpha}(\lambda) = -h^{ab}(x^\alpha_b - \lambda h_b \xi^\alpha). \tag{55}$$

Conexiunea de specia a II-a şi indice λ va avea coeficienţii $\overline{\Gamma}^c_{ab}$ daţi de expresia

$$\overline{\Gamma}^c_{ab}(\lambda) = (\partial_a \nabla_b \xi_\gamma - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} x^\alpha_a \nabla_b \xi_\beta) \zeta^{c\gamma}(\lambda) \tag{56}$$

care, ţinând seama de (4) şi (55) devine

$$\overline{\Gamma}^c_{ab}(\lambda) = \overline{\Gamma}^c_{ab} + \lambda h_{ba} \ell^c \tag{57}$$

unde

$$\ell^c = h^{ca} h_a. \tag{58}$$

Pentru $\lambda = 0$ obţinem conexiunea indusă de hipernormala $\Omega\Pi$ iar pentru $\lambda = 1$, conexiunea indusă de hipernormala centro-proiectivă.

Conexiunile de specia a II-a sunt în general nesimetrice chiar dacac spaţiul C_n este fără torsiune. In cazul când C_n este de curbură şi torsiune nulă, toate aceste conexiuni sunt simetrice.

Pentru conexiunea medie de indice λ,

$$\overset{m}{\Gamma}{}^c_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\Gamma^c_{ab}(\lambda) + \overline{\Gamma}^c_{ab}(\lambda)\right]$$

obţinem, din (54) şi (57)

$$\overset{m}{\Gamma}{}^c_{ab}(\lambda) = \overline{\Gamma}^c_{ab} - \lambda(h_{ab} k^c - h_{ba} \ell^c).$$

Deci, în general, conexiunile medii formează un fascicul. Dacă tensorul h_{ab} este simetric, toate aceste conexiuni coincid.

7. Clase remarcabile de hipersuprafeţe.

Distingem în primul rând hipersuprafeţele pentru care primul tensor fundamental este nul

$$h_{ab} = 0.$$

Ele se caracterizează prin proprietatea că vectorii unui câmp, corespunzători în conexiunea Γ^c_{ab} a hipersuprafeţei sunt corespunzători şi în conexiunea $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ a spaţiului C_n.

Avem apoi hipersuprafeţele pentru care

$$h_{(ab)} = 0.$$

Ele se bucură de următoarele proprietăţi caracteristice:

- Orice geodezică a hipersuprafeţei faţă de conexiunea Γ^c_{ab} este geodezică şi pentru spaţiul ambiant.
- Liniile asimptotice ale hipersuprafeţei sunt nedeterminate.
- Hiperplanul tangent în fiecare punct, are contact de ordin 2, cu orice curbă a hipersuprafeţei prin acel punct.

Hipersuprafeţele pentru care al doilea tensor fundamental este nul

$$h_{abc} = 0,$$

se bucura de proprietăţile caracteristice:

- Liniile lui Mayer sunt nedeterminate,
- Pentru $h_{[ab]} = 0$, hipercuadrica lui Mayer în fiecare punct are contact de ordin ≥ 3 cu orice curbă a hipersuprafeţei prin acel punct.

Hipersuprafeţele pentru care tensorul al treilea fundamental este nul

$$h_{abc} - \frac{3}{2}\, h_{(a}h_{bc)} = 0,$$

se caracterizează printr-una din proprietăţile:

- Liniile lui Darboux sunt nedeterminate.
- Pentru $h_{[ab]} = 0$, hipercuadricele lui Darboux în fiecare punct au contact de ordin ≥ 3 cu orice curbă a hipersuprafeţei prin acel punct.

In sfârşit, avem hipersuprafeţele pentru care

$$h_a = 0$$

şi pe care le numim *hipersuprafeţele Ţiţeica centrale.* Ele generalizează hipersuprafeţele Ţiţeica [10] şi se bucură de următoarele proprietăţi caracteristice:

- Primele două forme fundamentale sunt apolare, adică

$$h^{ab}h_{abc} = 0.$$

- Normalele afine (şi deci toate normalele de specia I-a) trec prin centrele locale O.

- Normalele centro-proiective (şi deci toate normalele de specia a II-a) aparţin hiperplanelor absolute locale Ω.

- Normalele afine sunt absolut concurente în sens Myller [7] pe hipersuprafaţă, punctele de concurenţă fiind centrele locale. Asta înseamnă că imaginea normalelor afine în harta spaţiului C_n de-a lungul oricărei curbe a hipersuprafeţei, pe spaţiul tangent într-un punct al curbei, sunt drepte concurente în centrul local.

- Hipernormalele centro-proiective sunt absolut coplanare pe hipersuprafaţă, în sensul că imaginile lor în harta spaţiului C_n de-a lungul oricărei curbe de pe hipersuprafaţă, pe spaţiul tangent într-un punct al curbei, aparţin aceluiaşi hiperplan şi anume hiperplanului absolut local.

- Toate normalele de specia I-a sunt confundate.

- Toate hipernormalele de specia a II-a sunt confundate,

- Normala afină şi hipernormala centro-proiectiva se corespund în polaritatea faţă de hipercuadrica lui Mayer,

- O hipercuadrică Darboux are centrul în centrul local,

- O hipercuardică Darboux are hiperplanul polar centrului local, confundat cu hiperplanul absolut local.

In concluzie facem observaţia că unele din rezultatele obţinute de noi în această lucrare generalizează proprietăţi cunoscute ale suprafeţelor din spaţiul centro-afin [4], [5], [6], [8], [11] iar altele sunt noi chiar şi în acest caz particular.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Cruceanu, *Sur les espaces à connexion centro-affine.* C.R. Acad. Sc. Paris, 1. 260, pp. 6272-6274.
2. V. Cruceanu, *Sur la théorie des hypersurfaces dans un espace à connexion centro-affine normale.* An. şt. Univ. Iaşi, secţia I-a, tom. XIII, fasc. 2, 1967, p.367-371.
3. V. Cruceanu, *Serii de direcţii înfăşurătoare în varietăţi neolonome.* Stud. şi cerc. şt, Acad. R.P.R., Filiala Iaşi, 11 (1960), pp. 343-354.
4. Ia.S. Dubrov et V.N. Skrydlov, *Tzentroafinaia teorija poverhnostei,* Trudy sem. vect. i tenso analizu, VIII (1950).
5. Gh.Th. Gheorghiu, *Hipersuprafeţe Ţiţeica.* Lucr. şt. Inst. ped. Timişoara, 1959, pp. 45-60.
6. O. Mayer, *Géométrie centro-affine différentielle des surfaces.* Ann. sc. Univ. Jassy, 21 (1934-1935). pp. 1-7.
7. A. Myller, *Directions concourantes dans une variété métrique à n dimensions.* Bull. Soc. Math. 56 (1928), pp. 1-6.

8. d. Papuc, *Asupra teoriei hipersuprafeţelor într-un spaţiu Klein cu grup liniar complet reductibil* (II). Stud. şi cerc. şt. Acad. R.P.R, Filiala Iaşi, 10 (1959), pp. 141-151.
9. M. Roth, *O generalizare a noţiunii de direcţii concurente în sensul academicianului Myller*. Lucr. ses. şt. Acad. R.P.R (1956), pp. 321-334.
10. Gh. Ţiţeica, *Sur une nouvelle classe de surfaces*. C.R. Acad. Sci. Paris, T. 144 (1907), pp. 1257-1259.
11. V.V. Vagner, *Obsciaia afinaia i tzentralino-proiectivnaia gheometrija ghiperpoverhnosti v tzentralino-afinom prostranstve i eio prilojenija k gheometricescoi teorij preobrazovany Karateodoru v variatzionom iscislenij*, Trudy sem. vect. i tens. analizu, 9, 1952, 75-145.