11 Sur la structure presque-produit associée à une connexion sur un espace fibré

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
s.I-a, Mat. XV, 1969, f.1, 159-167.

A une connexion sur un espace fibré principal on peut associer d'une manière naturelle une structure presque-produit. Le but de cette Note est de chercher certaines propriétés de la connexion à l'aide de cette structure.

1. Nous rappelons d'abord quelques notions sur les structures presque-produit [4].

Soit M une variété différentiable de classe C^∞, $\mathcal{F}$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ et $\mathcal{D}^r_s$ le $\mathcal{F}$-module des champs de tensems du type (r, s) et classe C^∞ sur M.

Définition 1. Nous disons que le champ de tenseus $F \in \mathcal{D}^1_1$ détermine sur la variété M une structure presque-produit s'il satisfait à la condition

$$F^2 = I, \tag{1}$$

où I est le champ de tenseurs de Kronecker.

Une telle structure détermine un automorphisme F_x, de l'espace tangent T_x en chaque point $x \in M$ En considérant alors l'équation

$$F_x(X) = \lambda X, \ X \in T_x, \tag{2}$$

on obtien $\lambda = \pm 1$. Si les valeurs propres $\lambda = \pm 1$ sont respectivement de multiplicité p et q nous avons $p + q = n$, où n est la dimension de M. Les sous-espaces propres correspondants

$$V_x = \{X \in T_x : F(X) = X\}, \ H_x = \{X \in T_x : F(X) = -X\} \tag{3}$$

sont supplémentaires, c'est-à-dire

$$T_x = V_x \oplus H_x, \ \forall x \in M. \tag{4}$$

En associant à chaque point $x \in M$ les sous-espaces propres V_x et H_x on obtient deux distributions supplémentaires de classe C^∞ sur M notées respectivement par V et H et nommées les distributions verticale et horizontale de la structure presque-produit considérée.

Pour chaque $x \in M$ et $X \in T_x$ nous avons

$$X = vX + hX \tag{5}$$

et

$$F(X) = vX - hX \tag{6}$$

où vX et hX sont respectivement les composantes verticale et horizontale de X.

Récproquement, deux distributions supplémentaires V et H de classe C^∞ sur M déterminent une structure presque-produit dont le tenseur de structure F est donné par (6).

Une structure presque-produit F sur M détermine deux champs de tenseurs v et $h \in \mathcal{D}_1^1$, nommés respectivement les projecteurs vertical et horizontal, définis par

$$v(X) = vX, \ h(X) = hX, \ X \in \mathcal{D}^1. \tag{7}$$

Ils satisfont aux conditions

$$v + h = I, \ v^2 = v, \ h^2 = h, \ v \circ h = h \circ v = 0, \ \operatorname{rang} v = p, \ \operatorname{rang} h = q. \tag{8}$$

A l'aide de I et F on obtient pour v et h

$$v = \frac{1}{2}(I + F), \quad h = \frac{1}{2}(I - F). \tag{9}$$

Réciproquement, étant donné sur M le champ v (resp. h) qui satisfait à la condition (8_2) (resp. (8_3)) il détermine une structure presque-produit avec le champ F donné par

$$F = 2v - I \quad (\text{resp. } F = I - 2h) \tag{10}$$

pour laquelle il soit le projecteur vertical (resp. horizontal).

A la structure presque-produit définie par F on peut associer le champ de tenseurs $N \in \mathcal{D}_2^1$ donné par

$$4N(X,Y) = [X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY] \tag{11}$$

et nommé le *champ de tenseurs de torsion* ou *de Nijenhuis* de la structure.

Nous avons

$$N(X,Y) = \begin{cases} h[X,Y] & \forall X,Y \in V, \\ v[X,Y] & \forall X,Y \in H, \\ 0 & \text{dans le reste} \end{cases} \tag{12}$$

On peut considérer encore les champs de tenseurs $N_1, N_2 \in \mathcal{D}_2^1$ donnés par

$$N_1 = N - F \circ N, \ N_2 = N + F \circ N. \tag{13}$$

Pour ces champs nous avons

$$\begin{aligned} N_1(X,Y) &= \begin{cases} 2h[X,Y] & \forall X,Y \in V, \\ 0 & \text{dans le reste,} \end{cases} \\ N_2(X,Y) &= \begin{cases} 2v[X,Y] & \forall X,Y \in H, \\ 0 & \text{dans le reste.} \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

De (14) et (12) il résulte:

La distribution V est intégrable si et seulement si

$$N_1 = 0. \tag{15}$$

La distribution H est intégrable si et seulement si

$$N_2 = 0. \tag{16}$$

Par suite, les deux distributions V et H sont simultanément intégrables pour

$$N = 0. \tag{17}$$

Dans ce cas on dit que la structure presque-produit F est intégrable.

2. Considérons maintenant un espace fibré principal $P(M, G)$ [2]. En associant à chaque point $u \in P$ l'espace tangent dans ce point à la fibré locale, on obtient une distribution intégrable V de classe C^∞ sur P nommée la *distribution verticale de la structure fibrée.* Une connexion sur P détermine une autre distribution H de classe C^∞ sur P qui est la *distribution horizontale de la connexion* considerée. H est supplémentaire à V et aussi invariante à l'action de G.

Par suite, à une connexion sur un espace fibré principal $P(M, G)$ on peut associer d'une manière naturelle une structure presque-produit sur P qui a comme distribution verticale la distribution verticale de la fibration et comme distribution horizontale la distribution horizontale de la connexion considerée. Le champ de tenseurs F de cette structure est donné alors par (6).

La distribution verticale etant intégrable, nous avons remplie la condition (15). D'autre part, les deux distributions étant invariantes à l'action de G on obtient pour $u \in P,\ a \in G$ et $X \in T_u(P)$

$$\begin{aligned} dR_a \circ F_u(X) = dR_a(v_u X) - dR_a(h_u X) = F_{ua} \circ dR_a(v_u X) + \\ + F_{ua} \circ dR_a(h_u X) = F_{ua} \circ dR_a(X). \end{aligned}$$

Par suite

$$dR_a \circ F_u = F_{ua} \circ dR_a,\ \forall\, u \in P,\ \forall\, a \in G. \tag{18}$$

Réciproquement, considérons une structure presque-produit sur $P(M, G)$ qui admet comme distribution verticale la distribution verticale de la fibration et qui possède encore la propriété (18). Alors la distribution horizontale H de cette structure est de classe C^∞ et supplémentaire à V. De (18) il résulte encore pour $u \in P,\ a \in G$ et $X \in H_u$,

$$F_{ua} \circ dR_a(X) = dR_a \circ F_u(X) = -dR_a(X),$$

c'est-à-dire $dR_a(X) \in H_{ua}$ et par suite H est la distribution horizontale d'une connexion sur $P(M, G)$.

Nous avons donc le

Théorème 1. *La condition necessaire et suffisante pour qu'une structure presque-produit sur un espace fibré principal $P(M, G)$ soit naturellement associèe à une connexion sur cet espace est que sa distribution verticale coïncide avec la distribution verticale de la fibration et que l'action du tenseur de structure F sur $\mathcal{D}^1(P)$ commute avec les translations à droite déterminèes par l'action de G sur P.*

Par suite à l'aide de la notion de structure presque-produit on pent donner la définition suivante pour une connexion sur un espace fibré principal.

Définition 2. On appelle *connexion sur un espace fibré principal* $P(M, G)$, avec la distribution verticale V, une structtture presque-produit F sur P qui satisfait aux conditions

1) $$F(X) = X \Longleftrightarrow X \in V,$$

2) $$dR_a \circ F_u = F_{ua} \circ dR_a, \ \forall\, u \in P, \ \forall\, a \in G.$$

Cette définition peut être plus commode dans certaines problèmes relativement aux connexions.

3. Soit $\mathcal{D}(M, E)$ l'ensemble de r-formes sur une variété différentiable M à valeurs dans un espace vectoriel E et F le tenseur d'une structure presque-produit sur M. A une r-forme $\varphi \in \mathcal{D}(M, E)$ nous faisons correspondre par F la r-forme $F\varphi$ définie de la manière suivante

(19) $$\begin{gathered}(F\varphi)(X_1, X_2, ..., X_r) = \varphi(FX_1, FX_2, ..., FX_r)\\ \forall\, X_1, X_2, ..., X_r \in \mathcal{D}^1(M).\end{gathered}$$

Une r-forme $\varphi \in \mathcal{D}_r(M, E)$ sera nommée *propre* pour F s'il existe $\lambda \in R$ tel que

(20) $$F\varphi = \lambda\varphi.$$

De (1) et (19) il résulte $\lambda = \pm 1$.

Considérons en particulier un espace fibré principal $P(M, G)$ et une connexion sur cet espace. Soit ω la forme de connexion et F le tenseur de la structure presque-produit associé. Nous avons

$$(F\omega)(X) = \omega(FX) = \omega(vFX) = \omega(X), \ \forall\, X \in \mathcal{D}^1(P).$$

Par suite,

(21) $$F\omega = \omega,$$

c'est-à-dire ω est une 1-forme propre pour la structure presque-produit associée correspondant à $\lambda = 1$.

Si $\Omega = D\omega$ est la 2-fonne de courbure pour la connexion considerée on a pour $X, Y \in \mathcal{D}^1(P)$,

$$(F\Omega)(X, Y) = \Omega(FX, FY) = d\omega(hFX, hFY) = d\omega(-hX, -hY) = \Omega(X, Y),$$

c'est-à-dire

(22) $$F\Omega = \Omega$$

et par suite Ω est une 2-forme propre correspondante à $\lambda = 1$.

De (22) on obtient

(23) $$\Omega(X, FY) = \Omega(FX, Y), \ \forall\, X, Y \in \mathcal{D}^1(P).$$

Nous avons encore le résultat remarquable [3]:

Théorème 2. *Entre la forme de connexion ω, la forme de courbure Ω et le tenseur de torsion N de la structure presque-produit associèe à une connexion sur l'espace fibré principal $P(M,G)$, il existe la relation*

$$\Omega(X,Y) = -\frac{1}{2}\omega[N(X,Y)],\ \forall X,Y \in \mathcal{D}^1(P). \tag{24}$$

En effet, les distributions V et H étant supplémentaires et les deux membres de la relation (24) $\mathcal{F}$-bilinéaires, il suffit de la vérifier dans les cas suivants:

a) Au moins un des champs X et $Y \in V$. Alors $\Omega(X,Y) = T(X,Y) = 0$ et la relation est vérifiée.

b) X et $Y \in H$. Dans ce cas

$$\Omega(X,Y) = -\frac{1}{2}\ \omega(v[X,Y]),\ N(X,Y) = v[X,Y]$$

et par suite (24) est aussi satisfaite.

De (12), (17) et (24) il résulte

$$\Omega = 0 \Longleftrightarrow N = 0 \tag{25}$$

et par suite.

Conséquence 1. Une connexion sur l'espace fibré principal $P(M,G)$ est plane ($\Omega = 0$) si et seulement si la structure presque-produit associée est intégrable ($N = 0$).

4. Pour toute connexion sur l'espace fibré principal $P(M,G)$ l'application "lift"

$$\ell : \mathcal{D}^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^1(P)$$

est un homomorphisme de modules qui satisfait encore à la condition

$$\ell[X^*,Y^*] = h[\ell X^*, \ell X^*],\ \forall X^*,Y^* \in \mathcal{D}^1(M). \tag{26}$$

De (12) et (26) il résulte

$$[\ell X^*, \ell Y^*] - \ell[X^*,Y^*] = N(\ell X^*, \ell Y^*),\ \forall X^*,Y^* \in \mathcal{D}^1(M). \tag{27}$$

D'autre part, du fait que pour chaque $u \in P$ les espaces H_u et $T_{\pi(u)}(M)$ sont isomorphes, on déduit que pour $X,Y \in H_u$ il existe $X^*,Y^* \in \mathcal{D}^1(M)$ tel que

$$X = (\ell X^*)_u,\ Y = (\ell Y^*)_u. \tag{28}$$

De (27) et (28) on obtient alors le

Théorème 3. *L' application "lift" $\ell : \mathcal{D}^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^1(P)$ définie par une connexion sur l'espace fibré principal $P(M,G)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie si et seulement si la structure presque-produit associée est intégrable.*

Par suite, le tenseur de torsion de la structure presque-produit associée donne l'écart de l'application "lift" d'un homomorphisme d'algèbres de Lie.

5. Soit X un champ de vecteurs sur $P(M,G)$ qui est *invariant* par les translations à droite, c'est-à-dire

$$dR_a(X_u) = X_{ua},\ \forall\, u \in P,\ \forall\, a \in G. \tag{29}$$

Cette condition peut s'écrire sous la forme équivalente

$$L_Y X = 0,\ \forall\, Y \in g^*, \tag{30}$$

où L est le symbole de la dérivée de Lie et g^* est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs fondamentaux sur P.

En tenant compte que

$$L_Y X = [Y, X] = [Y, hX] + [Y, vX] \tag{31}$$

et que pour $Y \in g^*$, $[Y, hX] \in H$ et $[Y, vX] \in V$, on obtient le

Théorème 4. *Un champ de vecteurs X sur $P(M,G)$ est invariant par les translations à droite si et seulement si ses composantes horizontale et verticale satisfont aux conditions*

$$[hX, Y] = 0,\ [vX, Y] = 0, \forall\, Y \in g^*, \tag{32}$$

c'est-à-dire elles sont aussi invariantes.

Définition 3. Un champ $X \in \mathcal{D}^1(P)$ s'appelle presque-décomposable [4] pour la structure presque-produit F associèe à une connexion sur P s'il engendre un groupe uniparamétrique qui conserve F, c'est-à-dire

$$L_X F = 0. \tag{33}$$

De la relation

$$L_X F = [X, FY] - F[X, Y] = \begin{cases} 2[hX, Y] & Y \in g^* \\ -2v[X, Y] & Y \in H \end{cases} \tag{34}$$

on obtient le

Théorème 5. *Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{D}^1(P)$ est presque-décomposable pour la structure presque-produit associèe à une connexion sur $P(M,G)$ si et seulement si*

$$[hX, Y] = 0,\ \forall\, Y \in g^*,\ v[X, Y] = 0,\ \forall\, Y \in H. \tag{35}$$

Ces conditions sont satisfaites si X est fondamental et par suite:

Conséquence 2. Tout champ de vecteurs fondamental sur l'espace fibré principal $P(M,G)$ est presque-décomposable pour la structure presque-produit associèe à une connexion donnée sur P.

Définition 4. On dit que le champ de vecteurs $X \in \mathcal{D}^1(P)$ engendre un groupe uniparamétrique d' automorphismes infinitésimaux pour une connexion donnée sur P si les transformations de ce groupe conservent la forme de connexion, c'est-à-dire

$$L_X \omega = 0. \tag{36}$$

De l'expression

$$L_X\omega(Y) = X\omega(Y) - \omega([X,Y]) = \begin{cases} -\omega([vX,Y]), & Y \in g^*, \\ -\omega(v[X,Y]), & Y \in H, \end{cases} \tag{37}$$

on obtient [1] le

Théorème 6. *Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{D}^1(P)$ engendre un groupe d'automorphismes infinitésimaux pour une connexion donnée sur $P(M,G)$ si et seulement si*

$$[vX,Y] = 0, \ \forall Y \in g^*, \ v[X,Y] = 0, \ \forall Y \in H. \tag{38}$$

Des théorèmes 4, 5 et 6 il résulte le

Théorème 7. *Soit une connexion sur l'espace fibré principal $P(M,G)$ pour laquelle F est le tenseur de la structure presque-produit associée et ω la forme de connexion. Alors, si un champ de vecteur $X \in \mathcal{D}^1(P)$ satisfait à deux des conditions:*

1) *X est invariant par les translations à droite,*

2) *X est presque-décomposable pour la structure presque-produit F,*

3) *X engendre un groupe d'automorphismes infinitésimaux pour la connexion,*

il satisfait aussi à la troisieme.

6. Considérons deux variétés différentiables M et M' douées avec les structures presque-produit définies respectivement par les champs de tenseurs F et F' et soient (V,H) et (V',H') les distributions supplémentaires correspondantes.

Définition 5. Nous dirons que l'application différentiable $f : M \longrightarrow M'$ est presque-décomposable relativement au couple (F,F') si les conditions suivantes:

$$df(V) \subset (V'), \ df(H) \subset H' \tag{38}$$

sont satisfaites.

Nous avons le

Théorème 8. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $f : M \longrightarrow M'$ soit presque-décomposable relativement au couple (F,F') est*

$$df_x \circ F_x = F'_{f(x)} \circ df_x, \ \forall x \in M. \tag{39}$$

En effet, soit l'application $f : M \longrightarrow M'$ presque-décomposable et $x \in M$, $X \in T_x(M)$. Alors

$$df_x \circ F_x(X) = df_x \circ F_x(vX) + df_x \circ F_x(hX) = df_x(vX) - df(hX) =$$
$$= F'_{f(x)} \circ df_x(vX) + F'_{f(x)} \circ df_x(hX) = F'_{f(x)} \circ df_x(X)$$

et par suite la condition (39) est satisfaite.

Réciproquement, soit la condition (39) satisfaite et $x \in X$, $X \in V_x$. Alors

$$F'_{f(x)} \circ df_x(X) = df_x \circ F_x(X) = df_x(X),$$

c'est-à-dire $df(V) \subset V'$. En considérant ensuite $X \in H_x$, nous avons

$$F'_{f(x)} \circ df_x(X) = df_x \circ F_x(X) = -df_x(X)$$

et par suite, $df(H) \subset H'$.

Définition 6. Soient maintenant deux espaces fibrés principaux $P(M,G)$ et $P'(M',G')$. On appelle homomorphisme de $P(M,G)$ en $P'(M',G')$ [2] un couple d'applications $f_G : G \longrightarrow G'$ et $f : P_P \longrightarrow P'$ qui satisfont aux conditions

1) $f_G(a \cdot b) = f_G(a) \cdot f_G(b)$, $\forall\, a, b \in G$,

2) $f_P \circ R_a = R_{f_G(a)} \circ f_P$, $\forall\, z \in G$.

De ces conditions il résulte que l'application $f_P : P - P'$ conserve les fibrés et par suite pour les distributions V et V' de P et P' nous avons

$$df(V) \subset V'.$$

Définition 7. On dit que l'homomorphisme précédent est un homomorphisme de connexion relativement au couple de connexions des distributions horizontales H et H' respectivement sur P et P' si $df(H) \subset H'$.

En considérant les structures presque-produit associèes àu couple de connexions sur P et P' on obtient le

Théorème 9. *Un homomorphisme (f_P, f_G) de l'espace fibré principal $P(M,G)$ dans l'espace fibré principal $P'(M',G')$ est un homomorphislne de connexion relativement à un couple de connexions donnèes sur P et P' si et seulement si l'application $f_P : P \longrightarrow P'$ est presque-décomposable par rapport au couple de structures presque-produit associées.*

Par suite, dans ce cas, l'application $f_P : P \longrightarrow P'$ satisfait à la condition (39).

BIBLIOGRAPHIE

1. Hangan Th., *Automorphismes infinitésimaux et holonomie.* C.R. Paris 247 (1958), p. 411-412.
2. Kobayashi S. and Nomizu K., *Foundations of differential geometry.* Vol. I, 1963. Interscience Publishers, New York, London.
3. Legrand G., *Une interprétation de la forme de courbure d'une connexion infinitésimale.* C.R. Acad. Sci. Paris, 250 (1960), p. 3441-3442.
4. Yano K., *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* Pergamon Press, 1965.