12 Sur les connexions affines générales

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
s.I-a, Mat. XVII, 1971, f.2, 421-435.

Les connexions affines sur une variété différentiable ont été introduites par E. Cartan [3] en liaison avec le transport des points le long d'une courbe, défini par une connexion linéaire et étudiées parmi d'autres par V. Hlavaty [8], A. Myller [11], E. Bortolotti [1] et V.E. Bortolotti et V. Hlavaty [2]. Ces connexions ont été reconsiderées du point de vue des espaces fibrés par A. Lichnerowicz [9], K. Nomizu [10], Ida Cattaneo-Gasparini [4], Th. Hangan [7] et d'autres géomètres.

Dans ce travail on donne deux nouvelles définitions globales pour une connexion affine générale sans utiliser la notion d'espace fibré et on démontre que l'ensemble des connexions affines ainsi que celui des connexions linéaires sur une variété différentiable peuvent être doués d'une structure de module affine. On introduit ensuite le tenseur affine de courbure pour une connexion affine et on établit certaines propriétés caractéristiques pour les connexions affines plates. Une partie des résultats a été publiée sans démonstration dans les C.R. Acad. Sc. Paris [5].

1. Modules affines. La notion de module affine qui se montre utile en mathématique a été introduite dans la Note [5] et étudiée en détail dans [6].

Soit V un module linéaire sur l'anneau K, noté encore par (V, K) et $A = (P, Q, R, ...)$ un ensemble quelconque d'éléments nommés points.

Définition 1.1. Nous disons que l'application $\pi : A \times A \longrightarrow V$ déterminé sur A une structure de module affine associée au module linéaire (V, K) si les conditions suivantes sont satisfaites:

M.A.1. $\forall P, Q, R \in A : \pi(P, Q) + \pi(Q, R) = \pi(P, R)$,

M.A.2. Il existe $O \in A$ tel que l'application $h : A \longrightarrow V$ définie par $h(P) = \pi(O, P)$ soit une bijection.

L'ensemble A doué de cette structure sera nommé *module affine* associé àu module linéaire (V, K) et noté par (A, V, K, π) au (A, V, K), ou plus simplement par A. Introduisons encore la notation $\pi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$. Si (V, K) est un espace linéaire, alors (A, V, K, π) est un espace affine dans le sens habituel.

Des conditions M.A.1 et M.A.2 il résulte aisément

$$\forall P \in A : \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{O} \text{ et } \forall P, Q \in A : \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}. \tag{1}$$

Si l'anneau K est unitaire on dit que (A, V, K) est aussi unitaire. Dans ce cas on peut montrer que pour tout système fini de points $P_1, P_2, ..., P_m \in A$ et d'éléments $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^m \in K$ tel que $\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^m = 1$, le point P défini par

$$\overrightarrow{OP} = \alpha^1\overrightarrow{OP}_1 + \alpha^2\overrightarrow{OP}_2 + \cdots + \alpha^m\overrightarrow{OP}_m. \tag{2}$$

ne dépend pas du point O. P sera nommé le *centre de masse* pour le système de points $P_1, P_2, ..., P_m$ de masses $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^m$ et noté par

$$P = \alpha^1 P_1 + \alpha^2 P_2 + \cdots + \alpha^m P_m. \tag{3}$$

Définition 1.2. On dit que la partie A' de A est un sous-module affine de (A, V, K, π) s'il existe un point $O \in A'$ tel que l'ensemble $V' = \{\overrightarrow{OP}; P \in A'\}$ soit un sous-module linéaire de (V, K) ou si $A' = \emptyset$.

En supposant l'anneau K unitaire et l'élément 2.1_K inversable, on a [6] le

Théorème 1.1. *Une partie $A' \neq \emptyset$ de A est un sous-module affine de (A, V, K, π) si et seulement si*

$$\forall P, Q \in A',\ \forall \alpha, \beta \in K;\ \alpha + \beta = 1 : \alpha P + \beta Q \in A'.$$

Définition 1.3. Soient (V, K) en (V', K') deux modules linéaires. On appelle *homomorphisme linéaire* de (V, K) en (V', K') un couple d'applications (f, φ) où $f : V \longrightarrow V'$ et $\varphi : K \longrightarrow K'$ qui satisfait aux conditions

HL.1. φ est un homomorphisme d'anneaux.

HL.2. $f(X + Y) = f(X) + f(Y), f(\alpha X) = \varphi(\alpha)f(X), \forall X, Y \in V, \forall \alpha \in K.$

En particulier, si $K' = K$ et $\varphi = id_K$ l'application f qui satisfait à HL.2 s'appelle *K-linéaire.* Nous pouvons maintenant donner la

Définition 1.4. On appelle homomorphisme affine du module affine (A, V, K, π) dans le module affine (A', V', K', π') un triplet d'applications (F, f, φ) tel que

HA.1. $(f, \varphi) : (V, K) \longrightarrow (V', K')$ soit un homomorphisme linéaire.

HA.2. $\forall P, Q \in A : f(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{F(P)F(Q)}$.

Soit une application $F : A \longrightarrow A'$ et un point O de A. L'application $f : V \longrightarrow V'$ définie par la condition

$$\forall X \in V : f(X) = X' \Longleftrightarrow X = \overrightarrow{OP},\ X' = \overrightarrow{F(O)F(P)} \tag{4}$$

s'appelle l'*application induite* par F à l'aide de O.

Théorème 1.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le couple (F, φ) où $F : A \longrightarrow A'$ et $\varphi : K \longrightarrow K'$ détermine un homomorphisme affine de (A, V, K, π) en (A', V', K', π') est qu'il existe un point $O \in A$ tel que l'application $f : V \longrightarrow V'$ induite par F à l'aide de O définisse avec φ un homomorphisme linéaire.*

Si $K' = K$ et $\varphi = id_K$, l'application F qui satisfait à la condition de ce théorème s'appelle K-affine. En supposant K et K' unitaires et 2.1_K inversable, on obtient [6] le

Théorème 1.3. *L'application $F : A \longrightarrow A'$ déterminé avec l'homomorphisme $\varphi : K \longrightarrow K'$ un homomorphisme affine de (A, V, K, π) dans (A', V', K', π') si et seulement si $\forall P, Q \in A$, et $\forall \alpha, \beta \in K$ tel que $\alpha + \beta = 1$, on a*

$$F(\alpha P + \beta Q) = \varphi(\alpha)F(P) + \varphi(\beta)F(Q). \tag{5}$$

2. Connexions linéaires.

Soit M une variété différentiable paracompacte de classe C^∞, $\mathcal{D}^0$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ et $\mathcal{D}^r_s$ le $\mathcal{D}^0$-module linéaire des champs de tenseurs du type (r, s) et classe C^∞ sur M. Pour tout couple d'ensembles E, F soit $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E en F. Mettons $\mathcal{F}(E, E) = \mathcal{F}(E)$.

Définition 2.1. On appelle [12] *connexion linéaire* sur la variété M une application $\nabla : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^1)$ satisfaisant aux conditions

CL.1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

CL.2. $\nabla_{\alpha X + \beta Y} = \alpha\nabla_X + \beta\nabla_Y$,

CL.3. $\nabla_X(\alpha Y) = X(\alpha)Y + \alpha\nabla_X Y$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{D}^1$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{D}^0$.

En remarquant que le corps R des réels est isomorphe au sous-corps de l'anneau $\mathcal{D}^0$ formé par les fonctions constantes sur M, de CL.1 et CL.2, on obtient le

Théorème 2.1. *Pour tout $X \in \mathcal{D}^1$, l'application $\nabla_X : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{D}^1$ est R-linéaire.*

Compte tenu que $\mathcal{F}(\mathcal{D}^1)$ est un module linéaire sur $\mathcal{D}^0$, de CL.2 on a le

Théorème 2.2. *L'application $\nabla : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^1)$ est $\mathcal{D}^0$-linéaire.*

Considérons deux connexions linéaires ∇ et ∇' sur M et mettons

$$S(X, Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y, \ \forall X, Y \in \mathcal{D}^1. \tag{6}$$

De la définition 2.1 il résulte que S est un champ de tenseurs du type (1.2) et classe C^∞ qui sera nommé le *tenseur de déformation* du couple (∇, ∇').

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des connexions linéaires sur M et $\pi : \mathcal{L}\times\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{D}^1_2$ l'application définie par $\pi(\nabla, \nabla') = S$.

On constate aisément que π satisfait aux conditions ML.1, ML.2 et par suite on a le

Théorème 2.3. *L' ensemble $\mathcal{L}$ des connexions linéaires sur la varité M peut être doué d'une structure de module affine associé àu module linéaire $\mathcal{D}^1_2$ sur l'anneau $\mathcal{D}^0$.*

Il résulte que $\mathcal{L}$ peut être regardé aussi comme un espace affine sur le champ R des réels.

Soit g une métrique riemannienne sur M et $\mathcal{D}^1_2(p)$ l'espace linéaire des tenseurs du type (1.2) en $p \in M$. En considérant une carte en p et en mettant

$$\forall S(p) \in \mathcal{D}^1_2(p) : S^2(p) = g_{i_1 i_2} g^{j_1 j_2} g^{k_1 k_2} S^{i_1}_{j_1 k_1} S^{i_2}_{j_2 k_2}, \tag{7}$$

on obtient une structure d'espace linéaire euclidien sur $\mathcal{D}_2^1(p)$. Si la variété M est compacte et orientable, alors la fonction $d : \mathcal{L}\times\mathcal{L} \longrightarrow R$ définie par

$$d^2(\nabla, \nabla') = \int_M S^2(p)dv, \tag{8}$$

où S est le tenseur de déformation du couple (∇, ∇'), déterminé une structure d'espace affine euclidien sur $\mathcal{L}$. On obtient par suite le

Théorème 2.4. *Toute métrique riemannienne sur une variété compacte et orientable M détermine une structure euclidienne sur l'espace affine $\mathcal{L}$ des connexions linéaires sur M.*

Soit U un sous-ensemble ouvert de M et $(\mathcal{L}(U), \mathcal{D}^1(U), \mathcal{D}^0(U))$ le module affine des connexions linéaires sur la sous-variété ouverte U. En considérant deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{D}^1(U)$, pour tout $P \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ et deux champs $X', Y' \in \mathcal{D}^1(M)$ tel que $X'_{|V} = X_{|V}$ et $Y'_{|V} = Y_{|V}$. Si $\nabla \in \mathcal{L}(M)$, alors en mettant

$$((\nabla_{|U})_X Y)_{(p)} = (\nabla_{X'} Y')_{(p)}, \ \forall p \in U \tag{9}$$

on peut montrer [14] que le vecteur $((\nabla_{|U})_X Y)_{(p)}$ ne dépend pas des champs choisis $X', Y' \in \mathcal{D}^1(M)$ et que $\nabla_{|U}$ est une connexion linéaire sur U. $\nabla_{|U}$ s'appelle la connexion linéaire induite par ∇ sur U et l'application $\rho_1 : \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(U)$ obtenue de cette manière est nommée l'application de restriction. Compte tenu que le couple d'applications de restriction (ρ_2, ρ_3) où $\rho_2 : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{D}^1(U)$ et $\rho_3 : \mathcal{D}^0(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(U)$ est un homomorphisme linéaire qui est localement un épimorphisme [14], on obtient le

Théorème 2.5. *Pour tout ouvert U de M, le triplet des applications de restriction (ρ_1, ρ_2, ρ_3) de $(\mathcal{L}(M), \mathcal{D}^1(M), \mathcal{D}^0(M))$ en $(\mathcal{L}(U), \mathcal{D}^1(U), \mathcal{D}^0(U))$ est un homomorphisme affine qui est localement un épimorphisme.*

Soit p_0 un point de M et $\mathcal{D}^1(p_0)$ l'espace linéaire tangent à M en p_0.

Définition 2.2. On appelle [10] *connexion linéaire* en p_0 une application $\nabla : \mathcal{D}^1(p_0) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^1(M), \mathcal{D}^1(p_0))$ qui satisfait aux conditions:

1. $\nabla_{X_0}(Y + Z) = \nabla_{X_0}Y + \nabla_{X_0}Z$,
2. $\nabla_{aX_0+bY_0} = a\nabla_{X_0} + b\nabla_{Y_0}$
3. $\nabla_{X_0}(\alpha Y) = X_0(\alpha)Y_{(p_0)} + \alpha(p_0)\nabla_{X_0}Y$,

où $X_0 \in \mathcal{D}^1(p_0)$, $Y, Z \in \mathcal{D}^1(M)$, $a, b \in R$ et $\alpha \in \mathcal{D}^0(M)$.

En considérant deux connexions linéaires en p_0, (∇, ∇') et en mettant pour $(X_0, Y) \in \mathcal{D}^1(p_0)\times\mathcal{D}^1(M)$,

$$S(X_0, Y) = \nabla'_{X_0}Y - \nabla_{X_0}Y \tag{10}$$

it résulte de la définition 2.2 que $S \in \mathcal{D}_2^1(p_0)$ et que l'application $\pi : \mathcal{L}(p_0)\times\mathcal{L}(p_0) \longrightarrow D_2^1(p_0)$ donnée par $\pi(\nabla, \nabla') = S$ satisfait aux conditions MA.1 et MA.2. Par suite on a le

Théorème 2.6. *L'ensemble $\mathcal{L}(p_0)$ des connexions linéaires dans un point $p_0 \in M$ peut être doué d'une structure d'espace affine associé à l'espace linéaire $(\mathcal{D}_2^1(p_0), R)$.*

Soit $\nabla \in \mathcal{L}(M)$, $P_0 \in M$, $X_0 \in \mathcal{D}^1(p_0)$, $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$ et $X(p_0) = X_0$. En mettant

$$\nabla_{(p_0)X_0} Y = (\nabla_X Y)_{(p_0)}. \tag{11}$$

On obtient une connexion linéaire $\nabla(p_0)$ en p_0 nommée la restriction de ∇ à p_0. On obtient aisément le

Théorème 2.7. *L'application de restriction du module affine $(\mathcal{L}(M), \mathcal{D}^1(M), \mathcal{D}^0(M))$ dans l'espace affine $(\mathcal{L}(p_0), \mathcal{D}^1(p_0), \mathcal{D}^0(p_0))$ est un épimorphisme affine.*

3. Connexions affines. En considérant un point $p \in M$, l'application $\pi : \mathcal{D}^1(p) \times \mathcal{D}^1(p) \longrightarrow \mathcal{D}^1(p)$ donnée par la règle

$$\pi(X_p, Y_p) = Y_p - X_p \tag{12}$$

détermine sur$\mathcal{D}^1(p)$ une structure d'espace affine sur R nommée la *structure affine canonique.* $\mathcal{D}(p)$ douée de cette structure s'appelle l'*espace affine tangent* à M en p et sera note par $\mathcal{P}(p)$. Le point p s'identifie avec le vecteur nul de $\mathcal{D}^1(p)$ et s'appelle le *point de contact* de M avec $\mathcal{P}(p)$.

Définition 3.1. On appelle *champ de points* de classe C^∞ sur M une fonction qui associe à chaque point $p \in M$ un point $P \in \mathcal{P}(p)$ tel que le champ de vecteurs $X = \overrightarrow{pP}$ soit de classe C^∞.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des champs de points de classe C^∞ sur M. L'application $\pi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{D}^1$ donnée par $\pi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$ satisfait aux conditions AM.l et AM.2 et par suite le

Théorème 3.1. *L'ensemble des champs de points de classe C^∞ sur M peut être doué d'une structure de module affine associé àu module linéaire $(\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^0)$.*

On a encore le

Théorème 3.2. *L'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ des applications de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$ peut être doué d'une structure de module affine associé àu module linéaire $(\mathcal{F}(\mathcal{D}^1) \times \mathcal{D}^1, \mathcal{D}^0)$.*

En effet, l'application $\Pi : \mathcal{F}(\mathcal{P}) \times \mathcal{F}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^1) \times \mathcal{D}^1$ définie par

$$\forall\, F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{P}) : \Pi(F, G) = (f_{FG}, X_{FG})$$

où

$$f_{FG}(X = \overrightarrow{pP}) = \overrightarrow{F(P)G(P)} - \overrightarrow{F(p)G(p)},\ X_{FG} = \overrightarrow{F(p)G(p)}$$

satisfait aux conditions MA.1 et MA.2.

Soit $D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P})$ une fonction qui associe à chaque champ de points $P \in \mathcal{P}$ une application $D_P : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$. Cette fonction induit les applications $\nabla : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^1)$ et $K : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{D}^1$ définie de la manière suivante:

Si $X, Y \in \mathcal{D}^1$ et $P, Q \in \mathcal{P}$ tel que $X = \overrightarrow{pP}$ et $Y = \overrightarrow{pQ}$, où p est le champ de points de contact, alors mettons

$$\nabla_X Y = \overrightarrow{QD_PQ} - \overrightarrow{pD_Pp} \text{ et } K(X) = \overrightarrow{pD_Pp}. \tag{13}$$

Définition 3.2. Nous appelons *connexion affine* sur M une application $D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P})$ telle que les applications induites ∇ et K satisfont aux conditions:

CA.1. $\nabla : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^1)$ est une connexion linéaire.

CA.2. $K : \mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{D}^1$ est un champ de tenseurs du type (1.1).

Remarque. La relation (13_1) peut s'écrire encore

$$\nabla_X Y = \overrightarrow{D_P p D_P Q} - \overrightarrow{pQ}. \tag{14}$$

En effet $\overrightarrow{QD_PQ} - \overrightarrow{pD_Pp} = \overrightarrow{Qp} + \overrightarrow{pD_PQ}) - (\overrightarrow{pD_PQ} + \overrightarrow{D_PQD_Pp}) = \overrightarrow{D_PpD_PQ} - \overrightarrow{pQ}$.

Théorème 3.3. *Si D est une connexion affine sur M, alors pour tout $P \in \mathcal{P}$, l'application $D_P : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est R-affine.*

Démonstration. De (14) et du théorème 2.1 on a

$$\overrightarrow{D_PpD_P(aQ + bR)} = \nabla_{\overrightarrow{pP}}(\overrightarrow{apQ} + \overrightarrow{bpR}) + \overrightarrow{apQ} + \overrightarrow{bpR} = \overrightarrow{aD_PpD_PQ} + \overrightarrow{bD_PpD_pR}$$

c'est-à-dire

$$D_P(aQ + bR) = aD_PQ + bD_PR. \tag{15}$$

Par suite, d'après le théorème 1.3, D_P est R-affine.

Conséquence 3.1. Pour tout $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble $D_P(\mathcal{P})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{P}$.

Théorème 3.4. *Si D est une connexion affine sur M, l'application $D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P})$ est $\mathcal{D}^0$-affine.*

Démonstration. Soit $\alpha, \beta \in \mathcal{D}^0$, $\alpha + \beta = 1$, $P, Q \in \mathcal{P}$ et $R = \alpha P + \beta Q$. Pour tout $S \in \mathcal{P}$ on a d'après CL.2 et (13)

$$\overrightarrow{D_PpD_PS} = \nabla_{\overrightarrow{pR}}(\overrightarrow{pS}) + K(\overrightarrow{pR}) = \alpha\nabla_{\overrightarrow{pP}}(\overrightarrow{pS}) + \beta\nabla_{\overrightarrow{pQ}}(\overrightarrow{pS}) + \alpha K(\overrightarrow{pP}) + \beta K(\overrightarrow{pQ}) = \overrightarrow{\alpha SD_PS} + \overrightarrow{\beta SD_QS}.$$

Par suite,

$$D_{\alpha P + \beta Q} = \alpha D_P + \beta D_Q, \tag{16}$$

c'est-à-dire d'après le théorème 1.3, D est une application $\mathcal{D}^0$-affine de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Conséquence 3.2. L'ensemble $D(\mathcal{P})$ cst un sous-module affine de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Pour $P = p$ on obtient de (13)

$$D_pQ = Q, \tag{17}$$

c'est-à-dire le

Théorème 3.5. *Si D est une connexion affine sur M et p le champ des points de contact, alors D_p est l'application identique de $\mathcal{P}$.*

De la définition 3.2 il résulte qu'à une connexion affine sur M correspond une connexion linéaire ∇ et un champ de tenseurs $K \in \mathcal{D}_1^1$ qui sont définis par les relations (14). Réciproquement, étant donnée une connexion linéaire ∇ et un champ $K \in \mathcal{D}_1^1$, alors pour l'application $D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P})$ définie par

$$\forall P, Q \in \mathcal{P} : \overrightarrow{QD_PQ} = \nabla_X Y + K(X), \tag{18}$$

où $X = \overrightarrow{pP}$ et $Y = \overrightarrow{PQ}$, on a les relations (14) et par suite D est une connexion affine sur M. On obtient donc ([4], [13]), le

Théorème 3.6. *Il existe une bijection entre l'ensemble des connexions affines sur M et l'ensemble des couples formes par une connexion linéaire et un champ de tenseurs du type* (1.1) *et classe C^∞ sur M.*

On peut donner la définition suivante pour une connexion affine, sans utiliser les notions de connexion linéaire et champ de tenseurs du type (1.1).

Définition 3.3. On appelle connexion affine sur la variété M une application $D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P})$ qui satisfait aux conditions:

CA.1$'$. $D_P(\alpha Q + \beta R) = \alpha D_P Q + \beta D_P R + X(\alpha)P + X(\beta)Q$,

CA.2$'$. $D_{\alpha P + \beta Q} = \alpha D_P + \beta D_Q$,

CA.3$'$. $D_p = id_{\mathcal{P}}$,

pour $\alpha, \beta \in \mathcal{D}^0$, $\alpha + \beta = 1$, $P, Q, R \in \mathcal{P}$ et $X = \overrightarrow{pP}$, où p est le champ de points de contact.

L'équivalence de cette définition avec la définition 3.2 s'etablit de la manière suivante:
Si D satisfait aux conditions CA.1 et CA.2, alors des conditions CL.2 et les théorèmes 3.3-3.5 il résulte les conditions CA.1$'$-CA.3$'$. Reciproquement, en supposant les conditions CA.1$'$-CA.3$'$, remplies, alors par un calcul simple, on peut déduire que les applications ∇ et K données par (13) satisfont aux conditions CA.1 et CA.2.

Définition 3.4. Nous appelons connexion affine normale sur M 'une connexion affine $D = (\nabla, K)$ pour laquelle K est le tenseur I de Kronecker, c'est-à-dire l'application identique de $\mathcal{D}^1$.

De la relation (13) il résulte le

Théorème 3.7. *Une connexion affine D sur M est normale si et seulement si*

$$\forall P \in \mathcal{P} : D_P p = P. \tag{19}$$

A une connexion linéaire ∇ il correspond, par suite, une connexion affine normale $D = (\nabla, I)$ qui est utilisée dans l'étude de certaines propriétés de la connexion linéaire ∇.
Pour la structure de l'ensemble A des connexions affines sur la variété M nous avons le

Théorème 3.8. *L' ensemble $\mathcal{A}$ des connexions affines sur M peut être doué d'une stmcture de module affine associé àu module linéaire $\mathcal{D}_2^1 \times \mathcal{D}_1^1$ sur $\mathcal{D}^0$.*

En effet, on constate que l'application qui associé à chaque couple ordonné de connexions affines $D = (\nabla, K)$ et $D' = (\nabla', K')$ le couple $(S, K' - K) \in D_2^1 \times D_1^1$, où S est donné par (6), satisfait aux conditions MA.1 et MA.2.
On a aussi le

Théorème 3.9. *Toute métrique riemannienne g sur une variété compacte et orientable M déterminé une structure euclidienne sur l'espace affine à des connexions affines sur M.*

Démonstration. Considérons une métrique g sur M et définissons la distance entre deux connexions affines $D = (\nabla, K)$ et $D' = (\nabla', K')$ par la relation

$$d^2(D, D') = \int_V S^2(p)dv + \int_V (K' - K)^2(p)dv, \tag{20}$$

où $S^2(p)$ est donné par (7) et

$$(K' - K)^2(p) = g_{i_1 i_2} g^{j_1 j_2}(K'^{i_1}_{j_1} - K^{i_1}_{j_1})(K'^{i_2}_{j_2} - K^{i_2}_{j_2}). \tag{21}$$

L'application $d : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \longrightarrow R$ ainsi obtenue déterminé une structure euclidienne sur l'espace affine $\mathcal{A}$.

Pour une connexion affine $D = (\nabla, K)$ sur M on peut définir la restriction $D_{|U}$ à une sous-variété ouverte U de M par

$$D_{|U} = (\nabla_{|U}, K_{|U}), \tag{22}$$

où $\nabla_{|U}$ et $K_{|U}$ sont les restrictions de ∇ et K à U. Du théorème 2.5 on obtient le

Théorème 3.10. *Pour toute sous-variété ouverte U de la variété M, l'application de restriction du module affine $(\mathcal{A}(M), \mathcal{D}^1_2(M), \mathcal{D}^0(M))$ dans le module affine $(\mathcal{A}(U), \mathcal{D}^1_2(U), \mathcal{D}^0(U))$ est un homomorphisme affine qui est localement un épimorphisme.*

En particulier, si U est un voisinage de coordonnèes sur M et (p, e_i) un repère sur le module affine $\mathcal{D}(U)$, alors en mettant

$$\overrightarrow{pP} = X^i e_i, \ \overrightarrow{pQ} = Y^i e_i, \ \nabla_{e_k}(e_j) = \Gamma^i_{kj} e_i, \ K(e_j) = K^i_j e_i, \tag{23}$$

on obtient pour la connexion affine $D_{|U}$ les équations locales

$$\overrightarrow{QD_P Q} = (e_k(Y^i) + \Gamma^i_{kj} Y^j + K^i_k) X^k e_i. \tag{24}$$

Soit un point p_0 de M et une application $D : \mathcal{P}(p_0) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(p_0))$. Alors D détermine les applications $\nabla : \mathcal{D}(p_0) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^1(M), \mathcal{D}^1(p_0)$ et $K : \mathcal{D}^1(p_0) \longrightarrow \mathcal{D}^1(p_0)$ par les relations

$$\nabla_{X_0} Y = \overrightarrow{Q_0 D_{P_0} Q} - \overrightarrow{p_0 D_{P_0} p}, \ K(X_0) = \overrightarrow{p_0 D_{P_0} p}, \tag{25}$$

où

$$X_0 = \overrightarrow{p_0 P_0} \in \mathcal{D}^1(p_0) \text{ et } Y = \overrightarrow{pQ} \in \mathcal{D}^1(M).$$

Définition 3.5. On appelle connexion affine dans le point p_0 une application $D : \mathcal{P}(p_0) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(p_0))$ qui possede la propriété que les applications induites ∇ et K sont respectivement une connexion linéaire et un tenseur du type (1.1) en p_0.

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans le théorème 3.8 on obtient le

Théorème 3.11. *L'ensemble $\mathcal{A}(p_0)$ des connexions affines dans un point $p_0 \in M$ peut être doué d'une structure d'espace affine associé à l'espace linéaire $\mathcal{D}^1_2(p_0)\times\mathcal{D}^1_1(p_0)$ sur R.*

On peut montrer en suite que l'application de restriction qui fait correspondre à une connexion affine $D = (\nabla, K)$ sur M la connexion affine $D(p_0) = (\nabla(p_0), K(p_0))$ en p_0 détermine un épimorphisme de module affine $\mathcal{A}(M)$ sur l'espace affine $\mathcal{A}(p_0)$.

4. La courbure d'une connexion affine. Nous donnons d'abord la

Définition 4.1. On appelle *crochet* de deux champs de points: $P, Q \in \mathcal{P}$ le champ $[P, Q] \in \mathcal{P}$ défini par la relation

$$\overrightarrow{p[P, Q]} = [\overrightarrow{pP}, \overrightarrow{pQ}]. \tag{26}$$

On constate aisément que l'application de $\mathcal{P}\times\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ définie par le crochet est R-affine dans les deux arguments et antisymétrique dans le sens que

$$p[\overrightarrow{P, Q}] = -p[\overrightarrow{Q, P}], \tag{26}$$

c'est-à-dire les champs $[P, Q]$ et $[Q, P]$ sont symétriques relativement au champ de points de contact.

On peut maintenant donner la

Définition 4.2. Nous appelons *tenseur affine de courbure* pour la connexion affine D sur M l'application $\rho : \mathcal{P}\times\mathcal{P}\times\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ donnée par la relation

$$\rho(P, Q)R = D_Q D_P R - D_P D_Q R + D_{[P,Q]} R. \tag{28}$$

En mettant $D = (\nabla, K)$, $\overrightarrow{pP} = X$, $\overrightarrow{pQ} = Y$, $\overrightarrow{pR} = Z$, on obtient, compte tenu de (18):

$$\overrightarrow{R\rho(P, Q)R} = \mathcal{R}(Y, X)Z + \mathcal{F}(Y, X). \tag{29}$$

Ici $\mathcal{R}$ est le tenseur de courbure pour la connexion linéaire

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{30}$$

et $\mathcal{F}$ est le tenseur défini par

$$\mathcal{F}(X, Y) = \nabla_X(K(Y)) - \nabla_Y(K(X)) - K([X, Y]), \tag{31}$$

qui sera nommé le *tenseur de torsion* pour la connexion affine D. Remarquons que pour une connexion affine normale, la tenseur $\mathcal{F}$ coïncide avec le tenseur de torsion $\mathcal{S}$ de la connexion linéaire

$$\mathcal{S}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{32}$$

On peut constater des relations (29)-(31) ou directement de (28) que ρ est une application $\mathcal{D}^0$-affine dans les trois arguments, ce qui justifie le nom de tenseur affine qui lui a été attribué. Le tenseur affine de courbure p est antisymétrique dans les premiers deux arguments dans le sens suivant. Dans le module affine $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, l'application $\rho(P, Q) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est symétrique à l'application $\rho(Q, P)$ par rapport à l'application identique de $\mathcal{P}$ c'est-à-dire

$$\overrightarrow{R\rho(P, Q)R} = -\overrightarrow{R\rho(Q, P)R}, \ \forall\, R \in \mathcal{P}. \tag{33}$$

Des relations (28), (30) et (31) on obtient les expressions suivantes pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}$ à l'aide de ρ

$$\mathcal{R}(X, Y) = \overrightarrow{R\rho(Q, P)R} - \overrightarrow{p\rho(Q, P)p} \text{ et } \mathcal{F}(X, Y) = \overrightarrow{p\rho(Q, P)p}. \tag{34}$$

Définition 4.3. Un champ de points $Q \in \mathcal{P}$ s'appelle *invariant* ou *absolument parallèle* pour la connexion affine D sur M si la condition suivante est satisfaite

$$(35) \qquad D_P Q = Q, \ \forall\, P \in \mathcal{P}.$$

De (18) il résulte le

Théorème 4.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le champ $Q \in \mathcal{P}$ soit invariant pour la connexion affine D sur M est*

$$(36) \qquad \nabla_X Y + K(X) = 0, \ \forall\, X \in \mathcal{D}^1,$$

où $Y = \overrightarrow{pQ}$.

Compte tenu des relations (28) et (29) on obtient le

Théorème 4.2. *Un champ de points R, invariant pour la connexion affine D, satisfait à la condition d'intégrabilité*

$$(37) \qquad \rho(P,Q)R = 0, \ \forall\, P,Q \in \mathcal{P} \ \textit{ou} \ \mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{F}(X,Y) = 0, \ \forall\, X,Y \in \mathcal{D}^1,$$

où $Z = \overrightarrow{pR}$.

Si Q et R sont deux champs de points invariants pour D alors en mettant $Z = \overrightarrow{QR}$, de (36) on obtient

$$(38) \qquad \nabla_X Z = 0,$$

c'est-à-dire Z est un champ de vecteurs absolument parallèle pour V. Reciproquement, si Q est un champ de points invariant pour D et Z un champ de vecteurs absolument parallèle pour V alors de (36) et (38) il résulte que le champ de points R défini par $\overrightarrow{QR} = Z$ est invariant pour D.

On en obtient le

Théorème 4.3. *Si la connexion affine D admet des champs de points invariants, alors leur ensemble est un sous-espace affine de $\mathcal{P}$ associé àu sous-espace linéaire formé par les champs de vecteurs absolument parallèles pour la connexions linéaire associée ∇.*

5. Connexions affines plates. Pour ce qui suit, nous avons besoin de la notion de famille de points invariante le long d'une courbe, pour une connexion affine.

Pour nos considérations, il suffit de supposer la courbe contenue dans un voisinage de coordonnèes U.

Soit par suite, $\gamma(t) : (a,b) \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞ sur M et notons par $X(t)$ la famille des vecteurs tengents à $\gamma(t)$. Nous disons que la fonction $Q(t) : (a,b) \longrightarrow P(\gamma(t))$ définit une famille de points de classe C^∞ sur $\gamma(t)$ si la famille de vecteurs $Y(t) = \overrightarrow{\gamma(t)Q(t)}$ est de classe C^∞ sur $\gamma(t)$, [14]. En vertu de cette définition, la famille de points $P(t)$ définie par $\overrightarrow{\gamma(t)P(t)} = X(t)$ est de classe C^∞. On peut montrer qu'il existe les champs de points $P, Q \in \mathcal{P}$ tels que

$$(39) \qquad P_{\gamma(t)} = P(t) \ \text{et} \ Q_{\gamma(t)} = Q(t), \ t \in (a,b).$$

Définition 5.1. Nous disons que *la famille de points $Q(t)$ sur la courbe est invariante* pour la connexion affine D sur M si on a

$$(D_P Q)_{\gamma(t)} = Q_{\gamma(t)}, \ t \in (a,b). \tag{40}$$

Compte tenu de (24) on obtient pour l'invariance dans la connexion affine D, le long de la courbe $\gamma(t)$, les *équations différentielles locales*

$$\frac{dY^i}{dt} + \Gamma^i_{kj}\,\frac{dx^k}{dt}\,Y^j + K^i_k\,\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{41}$$

La solution générale de ce système est donnée par

$$Y^i(t) = A^i_j(t,t_0)Y^j(t_0) + B^i(t,t_0), \ t, t_0 \in (a,b), \tag{42}$$

où $A^i_j(t,t_0)$ sont les solutions du système homogene associé à (41), qui satisfont aux conditions $A^i_j(t_0,t_0) = \delta^i_j$ et $B^i(t,t_0)$ est la solution de (41) correspondante aux conditions $B^i(t_0,t_0) = 0$. *Les équations finies locales* (42) définissent une bijection affine entre les espaces affines tangents en $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$ nommée le *transport parallèle de $\mathcal{P}(\gamma(t_0))$ en $\mathcal{P}(\gamma(t))$ le long de $\gamma(t)$* défini par la connexion affine D sur M. Dans le cas général le transport parallèle de $\mathcal{P}(\gamma(t_0))$ en $\mathcal{P}(\gamma(t))$ dépend de la courbe $\gamma(t)$ considérée. Nous pouvons maintenant donner la

Définition 5.2. Nous disons que la connexion affine D sur M est *plate* si pour tout point $p \in M$ existe un voisinage de coordonnèes U avec la propriété que le transport parallèle de $\mathcal{P}(p)$ en $\mathcal{P}(q)$ pour tout $q \in U$ ne dépend pas de la courbe considérée.

Cette condition est équivalente au fait que le système

$$\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj}Y^j + K^i_k = 0 \tag{43}$$

est complètement intégrable ce qui a lieu si et seulement si les tenseurs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}$ sont égaux à zéro.
Par suite on a le

Théorème 5.1. *Une condition necessaire et suffisante pour que la connexion, affine D soit plate est que les tenseurs de courbure $\mathcal{R}$ et de torsion $\mathcal{F}$ soient égaux à zéro sur M.*

De la relation (29) il résulte alors le

Théorème 5.2. *La connexion affine D sur M est plate si et seulement si le tenseur affine de courbure satisfait à la condition*

$$\rho(P,Q) = id_{\mathcal{P}}, \ \forall\, P, Q \in \mathcal{P}. \tag{44}$$

Soit U un voisinage de coordonnèes sur M et Q_a $(a = 0, 1, ..., n)$, $n+1$ champs de points sur U. Nous disons que ces champs sont $\mathcal{D}^0$-affines indépendants si pour tout $p \in U$, les points $Q_a(p)$ ne sont pas situés dans le même hyperplan. Si les champs Q_a sont invariants sur U pour $D_{|U}$, alors les champs de vecteurs $Y_i = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ sont absolument parallèles pour $\nabla_{|U}$. Comme Y_i sont $\mathcal{D}^0(U)$-linéairement indépendants des conditions d'intégrabilité pour le transport parallèle sur U dans la connexion linéaire ∇, il résulte $\mathcal{R} = 0$ sur U. Alors, de (37) il résulte encore

$\mathcal{F} = 0$ sur U. Réciproquement, si les tenseurs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{F}$ sont égaux à zéro sur U, le système (43) est complètement intégrable et par suite en prenant pour $p_0 \in U$, $n+1$ points $Q_a(p_0) \in \mathcal{P}(p_0)$ qui sont R-affines indépendants on obtient par l'intégration du système (43) $n+1$ champs de points Q_a invariants et $\mathcal{D}^0$-affines indépendants c'est-à-dire nous avons le

Théorème 5.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la connexion affine D soit plate est que chaque point de M admette un voisinage de coordonnèes U qui possede $n+1$ champs de points $\mathcal{D}^0(U)$-affines indépendants qui sont invariants pour $D_{|U}$.*

Enfin, on peut caractériser une connexion affine plate par la propriété suivante:

Théorème 5.4. *Une connexion affine $D = (\nabla, K)$ sur M est plate si el seulement si chaque point de M admet un voisinage de coordonnèes U qui possède n 1-formes $\omega^{(i)}$, $\mathcal{D}^0(U)$–linéairement indépendantes, absolument parallèles pour la connexion $\nabla_{|U}$ et telles que les 1-formes $\widetilde{\omega}^{(i)} = K_{|U}(\omega^{(i)})$ soient fermées.*

En effet, l'existence des n 1-formes $\omega^{(i)}$, $\mathcal{D}^0(U)$–linéairement indépendantes et absolument parallèles équivaut à l'annulation du tenseur $\mathcal{R}$ sur U.

Dans ces conditions on obtient

$$2\partial_{[j}\widetilde{\omega}^{(i)}_{k]} = T^h_{jk}\omega^{(i)}_h \tag{45}$$

et par suite les 1-formes $\widetilde{\omega}^{(i)}$ sont fermées si et seulement si le tenseur de torsion $\mathcal{F}$ est zéro sur U.

Remarque. Les connexions linéaires plates se caractérisent par l'annulation du tenseur de courbure. Par suite, pour ces connexions le tenseur de torsion peut être différent de zéro. En prenant dans les théorèmes de ce paragraphe une connexion affine normale on obtient des propriétés caractéristiques bien connues [15] pour les connexions linéaires de courbure et torsion nulles.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bortolotti E., *Directions concourantes et connexions dans les espaces courbes.* Bull. Soc. Math. France. 59 (1931), p. 70-74.
2. Bortolotti E. e Hlavaty V., *Contributi alla teoria delle connessioni.* Annali di Matematica (4), 15 (1936), p. 1-45; 129-154.
3. Cartan E., *Sur les variétés à connexion affine et la téorie de la relativite généralisée.* Ann. Ec. Norm. 40 (1923), p. 325-412; ibid. 41 (1924), p. 1-25; ibid. 42 (1925), p. 171-221.
4. Cattaneo–Gasparini Ida, *Sulle connessioni infinitesimali nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n*, Rend. Mat. Roma, 17 (1958), p. 326-404.
5. Cruceanu V., *Sur la définition d'une connexion affine.* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 532-534.
6. Cruceanu V., *Asupra modulelor afine.* St. cerc. mat., t. 21, nr. 9, p. 1271-1278, Bucureşti, 1969.
7. Hangan Th., *Sur les connexions projectives.* Rev. de math. pures et appl., t. II, nr. 2 (1958), p. 265-270.
8. Hlavaty V., *Sur le deplacement linéaire du point.* Vestnik Kral. Ceske Spol. Nauk. Praha, 2 (1924), p. 8-13.
9. Lichnerowicz A., *Théorie glob ale des connexions et des groupes d'holonomie.* Ed. Cremonese, Roma, 1955.
10. Milnor J., *Morse Theory.* Princeton Univ. Press, 1963.
11. Myller A., *Direzioni concorrenti sopra una superficie spiccati dai punti di una curva.* Rend. Lincei 33 (1924). p. 339-341.
12. Nomizu K., *Invariant affine connections on homogeneous spaces.* Amer. J. Math., 76 (1954), p. 33-65.
13. Nomizu K., *Lie groups and differential geometry.* The Math. Soc. of Japan, 1956.
14. Postnikov M.M., *La théorie variationnelle des géodésiques,* Izd-vo Nauka, Moskva 1965.
15. Vrănceanu G., *Leçons de géométrie différentielle*, vol. 1. Ed. Acad. R.P.R. Bucarest 1957.