14 Certaines structures sur le fibré tangent

Proc. Inst. Math. Iaşi,
Romania, 1974, 41-49.

L'étude du fibré tangent présente un intérêt particulier parce qu'il nous donne des informations précieuses sur la variété base et parce que la variété totale de ce fibré possède de nombreuses propriétés géométrique remarquable.

Dans cette Note nous voulons démontrer qu'une série de structures sur le fibré tangent, induites par des tenseurs de type (1,1) ou (0,2) sur la variété base et considérées par divers auteur peuvent être intégrées dans un schéma unitaire. A cette occasion nons mettons en évidence certains résultats nouveaux, utiles dans les applications.

1. Tenseurs de type $(1,1)$ **sur** TM**.** Soit $\pi : TM \longrightarrow TM$ le fibré tangent à la variété M de dimension n et de classe C^∞. Notons par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles (de classe C^∞) sur M et par $\mathcal{D}^r_s(M)$ l'$\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseur de type (r,s) et de classes C^∞ sur M. A une connexion linéaire ∇ sur M on associe habituellement deux structures presque-produites F et P et une structure presque-complexe J sur TM. A l'aide de l'application $\pi^* : TTM \longrightarrow TM$ et du connecteur $K : TTM \longrightarrow TM$ de ∇, [4] ces structures peuvent être caractérisées respectivement par les relations:

$$\begin{aligned} &\pi^* \circ F = -\pi^*, \quad \pi^* \circ P = K, \quad \pi^* \circ J = -K \\ &K \circ F = K, \qquad K \circ P = \pi^*, \quad K \circ J = \pi^*. \end{aligned} \tag{1}$$

Ces structures, aussi bien que d'autres structures $T \in \mathcal{D}^1_1(TM)$, associèes à certains tenseurs S de type $(1,1)$ sur M et considérées par divers auteurs [5]-[11] peuvent être représentées d'une manière unitaire, par les formules

$$\begin{aligned} \pi^* \circ T &= S \circ \alpha \cdot \pi^* + S \circ \beta \cdot K \\ K \circ T &= S \circ \gamma \cdot \pi^* + S \circ \delta \cdot K, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{F}(M)$. En mettant

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \pi^* \\ K \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \tag{3}$$

on peut écrire (2) sous la forme symbolique

$$\Gamma \circ T = S \circ A \cdot \Gamma. \tag{4}$$

De $\Gamma \circ T_1 = S_1 \circ A_1 \cdot \Gamma$ et $\Gamma \circ T_2 = S_2 \circ A_2 \cdot \Gamma$ il résulte $\Gamma \circ (T_1 \circ T_2) = (S_1 \circ S_2) \circ (A_1 \cdot A_2) \cdot \Gamma$. Par suite, en notant par $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{F}(M))$ l'ensemble des matrices de type 2×2 sur $\mathcal{F}(M)$, on peut énoncer le résultat.

Proposition 1.1. *L'application $\varphi_\nabla : \mathcal{D}_1^1(M) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{F}(M)) \longrightarrow \mathcal{D}_1^1(TM)$, donnée par les formules* (2), *est un monomorphisme de semi-groupes unitaires.*

Il en résulte que T est non singulier en même temps avec S et A et que $T^2 = \varepsilon I$ où $\varepsilon = \pm 1$ si, et seulement si, $S^2 = \varepsilon_1$ et $A^2 = \varepsilon_2 I$, avec $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2)$ et $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon$.

On a aussi $T^2 = 0$ pour $S^2 = 0$, ou $A^2 = 0$.

La solution générale de l'équation $A^2 = \varepsilon_2 I$ avec $\varepsilon_2 = 0, \pm 1$ dans $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathcal{F}(M))$, est donnée par,

$$A = \pm \begin{bmatrix} -\sqrt{\varepsilon_2 - \lambda\mu} & \lambda \\ \mu & \sqrt{\varepsilon_2 - \lambda\mu} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

où les fonctions λ et μ satisfont à la condition $\varepsilon_2 - \lambda\mu \geq 0$. Pour $\varepsilon_2 = 1$, nous avons encore les solutions $A = \pm I$.

En prenant en (2) $S = I$ et A donnée par (5), avec $\varepsilon_2 = -1$, on obtient certaines structures presque-complexes sur TM considérées par F.I. Kagan [6].

Un intérêt spécial présentent les structures T_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ qui s'obtiennent de (2) en prenant S arbitraire et pour A respectivement les matrices,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Par suite, T_i sont caractérisées par les relations

$$\Gamma \circ T_i = S \circ A_i \cdot T, \ (i = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Pour $S = I$, les structures T_i coïncident respectivement avec I, F, P et J. Pour $S = -I$ les structures T_2, T_3, T_4 correspondantes ont été considérées, d'un autre point de vu, par V. Oproiu [8]. Enfin, pour S arbitraire, T_1 est le lift horizontal de S. Des relations (7) on obtient

Proposition 1.2. a) *Les structures T_1, T_2, T_3 sont presque-produites, presque-complexes ou presque-tangentes en même temps avec S.*

b) *La structure T_4 est presque-produite, presque-complexe ou presque-tangente si, et seulement si, S est respectivement presque-complexe, presque-produite ou presque-tangente.*

c) *Pour S arbitraire, T_i satisfont aux relations*

$$T_2 = T_1 \circ F, \ T_3 = T_1 \circ P, \ T_4 = T_1 \circ J \tag{8}$$

et aux conditions de compatibilité

$$T_1 \circ T_j = T_j \circ T_1 \ (j = 2, 3, 4), \ T_i \circ T_j = -T_j \circ T_i \ (i \neq j = 2, 3, 4). \tag{9}$$

Remarquons aussi la relation

$$T_3 + T_4 = 2S^V \tag{10}$$

où S^V est le lift vertical de S. En particulier, pour $S^2{=}\varepsilon I$ avec $\varepsilon{=}0, \pm 1$, on obtient de (8) et (9)

$$\begin{aligned} T_1 \circ T_2 &= \varepsilon F, \quad T_1 \circ T_3 = \varepsilon P, \quad T_1 \circ T_4 = \varepsilon J \\ T_2 \circ T_3 &= \varepsilon J, \quad T_2 \circ T_4 = \varepsilon P, \quad T_3 \circ T_4 = -\varepsilon F. \end{aligned} \tag{11}$$

De (9) et (11) on retrouve pour $S = I$, les résultats connus:

$$F \circ P = -P \circ F = J,\ P \circ J = -J \circ F = P,\ P \circ J = -J \circ P = -F. \tag{12}$$

Considérons maintenant le problème de l'intégrabilité des structures T_i qui satisfont à la condition $T_i^2 = \varepsilon I$, $\varepsilon = 0, \pm 1$, c'est-à-dire qui sont presque-produites, presque-complexes ou presque-tangentes. En notant par N_i le tenseur de Nijenhuis pour T_i, il résulte que T_i est intégrable si, et seulement si,

$$\pi^* \circ N_i = 0,\ K \circ N_i = 0. \tag{13}$$

Par un calcul un peu laborieux on obtient les résultats

Proposition 1.3. *La structure T_1 est intégrable si, et seulement si, S est intégrable et pour tous $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$,*

$$\begin{aligned} &\nabla_{SX} S - S \circ \nabla_X S = 0 \\ &R(SX, SY) + \varepsilon R(X, Y) - S \circ [R(SX, Y) + R(X, SY)] = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Pour $\varepsilon = -1$, le résultat a été établi par S. Tanno [9].

Proposition 1.4. *La structutre T_2 est intégrable si, et seulement si, S est intégrable et pour tous $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$*

$$\begin{aligned} &\nabla_{SX} S + S \circ \nabla_X S = 0 \\ &R(SX, SY) + \varepsilon R(X, Y) + S \circ [R(SX, Y) + R(X, SY)] = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Pour $\varepsilon = -1$ on retrouve un résultat de V. Oproiu [8] et pour $S = I$ on obtient l'intégrabilité de la structure F, etablie par T. Nagano [7] et qui revient à $R = 0$.

Pour exprimer d'une manière géométrique et plus simple l'intégrabilité des structures T_3 et T_4 nous rappelons qu'à une connexion linéaire ∇ sur M et à un champ de tenseurs $S \in \mathcal{D}^1_1(M)$ on peut associer une connexion *affine* (∇, S), [1]-[3]. Le tenseur de torsion pour cette connexion est donné par

$$\mathcal{T}(X, Y) = \nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y) \tag{16}$$

qui peut s'exprimer à l'aide de la torsion T de ∇ par

$$\mathcal{T}(X, Y) = (\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X + S(T(X, Y)). \tag{17}$$

En considérant les structures T_3 et T_4 on obtient les mêmes conditions d'intégrabilité, à savoir:

Proposition 1.5. *Les structures T_3 et T_4 sont intégrables si, et seulement si, pour tous $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$ on a*

$$(18)\qquad \begin{gathered} T(SX,SY)-[(\nabla_{SX}S)Y-(\nabla_{SY}S)X]=0,\ R(SX,SY)=0,\ S\circ R(X,SY)=0, \\ \mathcal{T}(X,SY)=0,\ S\circ\mathcal{T}(X,Y)=0,\ \varepsilon R(X,Y)=0. \end{gathered}$$

Par suite, il en résulte

Conséquence 1.1. *Pour $\varepsilon = \pm 1$, les structures T_3 et T_4 sont intégrables si, et seulement si, la connexion affine (∇, S) est localement plate, c'est-à-dire*

$$(19)\qquad \mathcal{T} = R = 0.$$

En particulier, pour $S{=}I$, on obtient que les structures P et J sont simultanément intégrables, à savoir, lorsque la connexion affine normale (∇, I) est localement plate, c'est-à-dire $T{=}R{=}0$, [1]-[3].

2. Tenseurs de type $(0,2)$ sur TM. Un procédé analogue à celui utilisé dans le paragraphe précédent pour les tenseurs de type (1,1) nous permet d'associer à un champ de tenseurs $g\in\mathcal{D}^0_2(M)$ et à une matrice $A\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathcal{F}(M))$ un champ de tenseurs $G\in\mathcal{D}^0_2(TM)$, défini par la relation

$$(20)\qquad G=\alpha g\circ(\pi^*\times\pi^*)+\beta g\circ(\pi^*\times K)+\gamma g\circ(K\times\pi^*)+\delta g\circ(K\times K)$$

qui symboliquement peut s'écrire sous la forme

$$(21)\qquad G = g\circ{}^t\Gamma\times A\cdot\Gamma.$$

Par un calcul direct, en utilisant des vecteurs verticaux et horizontaux, on obtient

Proposition 2.1. a) *Le tenseur G est symétrique si et seulement si g et A sont simultanément symétriques où antisymétriques.*

b) *Le tenseur G est antisymétrique si, et seulement si, g est symétrique et A antisymétrique au g est antisymétrique et A symétrique.*

c) *Le tenseur G est non singulier en même temps avec g et A.*

Le cas où g est une métrique riemannienne sur M et A une matrice symétrique a été considéré par F.I. Kagan [6].

Nous distinguons en particulier les structures G_i $(i = 1,2,3,4)$ qui s'obtiennent de (21) en prennant g arbitraire et pour A respectivement les matrices,

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

(22)

$$A'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Par suite, les structures G_i sont donnèes par les formules

$$\begin{aligned} G_1 &= g \circ (\pi^* \times K) + g \circ (K \times \pi^*), \\ G_2 &= g \circ (\pi^* \times K) - g \circ (K \times \pi^*) \\ G_3 &= g \circ (\pi^* \times \pi^*) + g \circ (K \times K), \\ G_4 &= g \circ (\pi^* \times \pi^*) - g \circ (K \times K) \end{aligned} \tag{23}$$

Nous remarqnons que G_1 est le lift horizontal de g et, pour g métrique riemannienne sur M, G_3 est la métrique de Sasaki [11].

Pour g antisymétrique G_3 et G_4 ont été considérées par V. Oproiu [8].

Il s'ensuit des relations (23) et de la proposition 2.1:

Proposition 2.2. *Les structures G_1, G_3 et G_4 sont symétriques ou antisymétriques en même temps avec g. La structure G_2 est symétrique (antisymétrique) pour g antisymétrique (symétrique).*

En utilisant les notations

$$\begin{aligned} (G \circ T)(A, B) &= G(A, T(B)), \\ G(T, T)(A, B) &= G(T(A), T(B)) \end{aligned}$$

pour $G \in \mathcal{D}^0_2(M)$, $T \in \mathcal{D}^1_1(TM)$ et $A, B \in \mathcal{D}^1(M)$, des relations (1), (8) et (23) on obtient

Proposition 2.3. a) *Entre les structures G_i et F, P, J il existe les relations*

$$G_2 = G_1 \circ F, \;\; G_3 = G_1 \circ P, \;\; G_4 = G_1 \circ J. \tag{24}$$

b) *Les structures G_i et T_j satisfont aux conditions de compatibilité*

$$G_i(T_j, T_j) = \varepsilon G_i, \;\; \varepsilon = \pm 1 \tag{25}$$

si, et seulement si, g et S satisfont aux conditions de compatibilité

$$g(S,S) = \begin{cases} \varepsilon g \text{ pour } & i=1,\, j=1,3;\; i=2,\, j=1,4;\; i=3, j=1,\,2,3,4; \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=4,\, j=1,2, \\ -\varepsilon g \text{ pour } & i=1,\, j=2,4;\; i=2,\, j=2,3;\; i=4,\, j=3,4. \end{cases} \tag{26}$$

En particulier, pour $S = I$ on en obtient

$$G_i(F,F) = \begin{cases} G_i & i=3,4 \\ -G_i & i=1,2, \end{cases}$$

(27)
$$G_i(P,P) = \begin{cases} G_i & i=1,3 \\ -G_1 & i=2,4, \end{cases}$$

$$G_i(J,J) = \begin{cases} G_i & i=2,3 \\ -G_i & i=1,4. \end{cases}$$

Nous remarquons aussi, la relation

(28)
$$G_3 + G_4 = 2g^V$$

où g^V est le lift vertical de g.

Les structures G_i ont les expressions locales:

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_{i\ell}\Gamma^\ell_j + \Gamma^\ell_i g_{\ell j} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} g_{i\ell}\Gamma^\ell_j - \Gamma^\ell_i g_{\ell j} & g_{ij} \\ -g_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

(29)
$$G_3 = \begin{bmatrix} g_{ij} + \Gamma^\ell_i g_{\ell h} G^h_j & \Gamma^\ell_i g_{\ell j} \\ g_{i\ell}\Gamma^\ell_j & g_{ij} \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} g_{ij} - \Gamma^\ell_i g_{\ell h} G^h_j & -\Gamma^\ell_i g_{\ell j} \\ -g_{i\ell}\Gamma^\ell_j & -g_{ij} \end{bmatrix}$$

où Γ^ℓ_{ik} sont les coefficients de la connexion ∇ et $\Gamma^\ell_i = \Gamma^\ell_{ik} y^k$.

En particulier, on en obtient, pour g symétrique

$$G_1 = g_{ij} dx^i \odot Dy^j, \ G_2 = g_{ij} dx^i \wedge Dy^j,$$

(30)
$$G_3 = \frac{1}{2} g_{ij} dx^i \odot dx^j + \frac{1}{2} g_{ij} Dy^i \odot Dy^j,$$

$$G_4 = \frac{1}{2} g_{ij} dx^i \odot dx^j - \frac{1}{2} g_{ij} Dy^i \odot Dy^j.$$

Pour g antisymétrique, nous avons aussi

$$G_1 = g_{ij} dx^i \wedge Dy^j, \ G_2 = g_{ij} dx^i \odot Dy^j,$$

(31)
$$G_3 = \frac{1}{2} g_{ij} dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} g_{ij} Dy^i \wedge Dy^j,$$

$$G_4 = \frac{1}{2} g_{ij} dx^i \wedge dx^j - \frac{1}{2} g_{ij} Dy^i \wedge Dy^j.$$

Dans ces relations $Dy^j = dy^j + \Gamma^j_{k\ell} dx^k y^\ell$ et "$\odot$" réprésente le produit symétrique.

Soient V le champ de vecteurs canonique sur TM et W la jerbe géodésique de ∇, caractérisés par

$$\pi^* V_Z = 0_{\pi(Z)},\ KV_Z = Z;\ \pi^* W_Z = Z,\ KW_Z = 0_{\pi(Z)},\ \forall\, Z \in TM. \tag{32}$$

A l'aide de ces champs de vecteurs, nous pouvons associer aux structures G_i les 1-formes σ_i et ω_i sur TM, définies par

$$\sigma_i = G_i(V),\ \omega_i = G_i(W). \tag{33}$$

Compte tenu des propriétés

$$\begin{aligned} F(V) &= V, & P(V) &= W, & J(V) &= -W,\\ F(W) &= -W, & P(W) &= V, & J(W) &= V, \end{aligned} \tag{34}$$

on déduit que pour g arbitraire, σ_i et ω_i sont liées par les relations

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \omega_3 = \omega_4,\ \omega_1 = \omega_2 = \sigma_3 = -\sigma_4. \tag{35}$$

Par suite, elles se reduisent à σ_i et ω_i qui ont les expressions locales

$$\sigma = g_{ij} y^i dx^j,\ \omega_1 = g_{ij} y^i Dy^j. \tag{36}$$

La différentielle extérieure de σ_1 est donnée localement par

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2}(\nabla_k g_{ij} - \nabla_j g_{ik} + g_{ih} T^h_{kj}) y^i dx^k \wedge dx^j + g_{ij} Dy^i \wedge dx^j \tag{37}$$

d'où il résulte que $ds_1 = 0$, seulement si $\sigma = 0$, c'est-à-dire $g = 0$.

Pour ceux qui suivent il est nécessaire de rappeler qu'une connexion linéaire ∇ et un champ de tenseurs $g \in \mathcal{D}^0_2(M)$ déterminent une connexion *co-affine* ou *centro-projective* (∇, g), [1], [3].

On appelle *co-torsion* d'une telle connexion le champ de tenseurs $\tau \in \mathcal{D}^0_3(M)$ défini par la relation

$$\tau(X,Y) = \nabla_X(gY) - \nabla_Y(gX) - g[X,Y] \tag{38}$$

qui peut s'écrire encore sous la forme

$$\tau(X,Y) = (\nabla_X g)Y - (\nabla_Y g)X + gT(X,Y). \tag{39}$$

Ce tenseur a l'expression locale

$$\tau_{kji} = \nabla_k g_{ji} - \nabla_j g_{ki} + g_{hi} T^h_{kj}. \tag{40}$$

A l'aide de τ on peut écrire, pour g symétrique,

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2}\tau_{kji} y^i dx^k \wedge dx^j - g_{ij} dx^i \wedge Dy^j \tag{41}$$

et pour g antisymétrique

$$ds_1 = -\frac{1}{2}\tau_{kji} y^i dx^k \wedge dx^j + g_{ij} dx^i \wedge Dy^j. \tag{42}$$

Compte tenu de (30) et (31) on en obtient

Proposition 2.4. *La forme σ_1 satisfait à la condition $d\sigma_1 = -G_2$ pour g symétrique et à $d\sigma_1 = G_1$, pour g antisymétrique, si et seulement si la connexion centro-projective (∇, g) est sans co-torsion, c'est-à-dire*

$$\tau = 0. \tag{43}$$

Pour ω_1 on obtient en général

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} - g_{ij}\Gamma^j_{\ell k} - g_{kj}\Gamma^j_{\ell i}\right) y^i dx^\ell \wedge dy^k + g_{ij} dy^i \wedge dy^j + \\ &+ \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\Gamma^j_{\ell k} + g_{ij}\frac{\partial \Gamma^j_{\ell k}}{\partial x^m}\right) y^i y^k dx^m \wedge dx^\ell. \end{aligned} \tag{44}$$

Si g est symétrique cette relation peut s'écrire

$$d\omega_1 = y^i Dg_{ik} \wedge Dy^k + \frac{1}{2} g_{ij} R^j_{m\ell k} y^i y^k dx^m \wedge dx^\ell. \tag{45}$$

De (44) et (45) il résulte que $d\omega_1 = 0$ si, et seulement si,

1. g est symétrique, 2. $Dg_{ik} = 0$, 3. $g_{ij}R^j_{m\ell k} + g_{kj}R^j_{m\ell i} = 0$.

La troisième condition étant une conséquence des deux premières on en obtient

Proposition 2.5. *La forme ω_1 est fermée si, et seulement si, g est symétrique et covariant constante. Dans ce cas ω_1 est exacte et donnée par*

$$\omega_1 = \frac{1}{2} d(V^2). \tag{47}$$

Pour g antisymétrique (44) devient

$$d\omega_1 = y^i Dg_{ik} \wedge Dy^k + \frac{1}{2} g_{ij} R^j_{m\ell k} y^i y^k dx^m \wedge dx^\ell + g_{ij} Dy^i \wedge Dy^j. \tag{47}$$

Cette relation nous suggère l'idée de considérer pour g antisymétrique la 2-forme $\psi = G_3 - G_4$ qui a l'expression locale

$$\psi = g_{ij} Dy^i \wedge Dy^j. \tag{48}$$

De (47) et (48) on obtient

Proposition 2.6. *Pour g antisymétrique et non singulier la forme ω_1 satisfait à la condition $d\omega_1 = \psi$ si, et seulement si, g est covariant constante et la connexion linéaire est sans courbure.*

Nous allons voir maintenant dans quel cas les structures G_2, pour g symétrique et G_1, G_3, G_4, pour g antisymétrique, sont intégrables, c'est-adire leurs différentielles extérieures sont nulles. A cette occasion nous alons preciser et completer certains résultats obtenus par V. Oproiu [8] sur l'intégrabilité des structures G_2, G_3 et G_4 pour g antisymétrique et non singulier.

En supposant g symétrique on obtient de (30)

$$dG_2 = \frac{1}{2}\tau_{kji} dx^k \wedge dx^j \wedge Dy^i - \frac{1}{2} g_{km} R^m_{ji\ell} y^\ell dx^k \wedge dx^j \wedge dx^i. \tag{49}$$

Par suite, $dG_2 = 0$ si et seulement si

$$(50) \qquad \tau_{kji} = 0, \quad g_{[|km|}R^m_{ji]\ell} = 0.$$

Mais, pour $\tau = 0$, nous avons vu que $G_2 = -d\sigma_1$, c'est-à-dire G_2 est exacte et par suite la condition (50_2) est aussi satisfaite. On peut voir par un calcul direct, ou en utilisant les identités de Bianchi pour la connexion centroprojective (∇, g), que la condition (50_2) est une conséquence différentielle de (50_1).

Pour g antisymétrique le membre droit de la relation (49) nous donne la différentielle extérieure de G_1 et par suite nous pouvons énoncer la

Proposition 2.7. *Les structures G_2, pour g symétrique et G_1, pour g antisymétrique, sont intégrables si, et seulement si, la connexion centroprojective (∇, g) est sans co-torsion. Dans ces cas G_2 et G_1 sont exactes et donnèes respectivement par*

$$(51) \qquad G_2 = -d\sigma_1, \quad G_1 = d\sigma_1.$$

En considérant pour g antisymétrique, la 2-forme ψ on obtient

$$(52) \qquad d\psi = Dg_{ij} \wedge Dy^i \wedge Dy^j + g_{ij}R^i_{\ell km}y^m dx^\ell \wedge dx^k \wedge Dy^i$$

et par suite, $d\psi = 0$ si, et seulement si,

$$(53) \qquad Dg_{ij} = 0, \quad g_{ij}R^i_{\ell km} = 0.$$

On en obtient le résultat.

Proposition 2.8. *Pour g antisymétrique et non singulier la 2-forme $\psi = G_3 - G_4$ est fermée si et seulement si g est covariant constant et la connexion linéaire ∇ est sans courbure. Dans ce cas ψ est exacte et donnée par*

$$(54) \qquad \psi = d\omega_1.$$

Les structures G_3 et G_4, pour g antisymétrique, peuvent s'écrire sous la forme

$$(55) \qquad G_3 = g^V + \frac{1}{2}\psi, \quad G_4 = g^V - \frac{1}{2}\psi.$$

En tenant compte de (52) et (55) et du fait que les formes locales dx^i et Dy^j sont linéairement indépendantes on obtient que G_3 et G_4 sont intégrables en même temps avec g^V et ψ.

Par suite nous avons la

Proposition 2.9. *Pour g antisymétrique et non singulier les structures G_3 et G_4 sont intégrables si, et seulement si, g est intégrable et covariant constant et la connexion linéaire ∇ est sans courbure.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Cataneo-Gasparini Ida, *Sulle connessioni infinilesimati nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n*. Rend. Mat. Roma, 17, 1958, 324-404.
2. Cruceanu, V., *Contribuţii la studiul spaţilor cu conexiune centro-afină.* Thèse, Jassy, 1964.
3. Cruceanu, V., *Structures et connexions classiques sur les variétés différentiables.* An. Şt. Univ. "Al.I. Cuza", t. XXII, s. I-a, Iaşi, 1976, f. 2, 181-190.

4. Dombrowski, P., *On the geometry of the tangent bundle.* J. Reine und Angewandte Mathematik, 210, 1962, 73-88.
5. Ianuş, S., Udrişte, C., *Asupra spaţiului fibrat tangent al unei varietăţi diferenţiabile.* Studii şi Cerc. Mat., Acad. RSR, 22, 1970, 599-611.
6. Kagan, F.I., *Rimanovy metriki v kasatel'nom rassloenii nad rimanovym mnogoobraiem.* Izv. vissh. ucheb. zaved. Mat., 6, 1973, 41-51.
7. Nagano, T., *Isometries on complex-product spaces.* Tensor, 9, 1959, 47-61.
8. Oproiu, V., *Some remarkable structures and connections defined on the tangent bundle.* Rend. Mat. Roma, 6, 1973, 503-540.
9. Tanno, S., *Almost complex structures în bundle spaces over almost contact manifolds.* J. Math. Soc. Japan, 17, 2, 1965, 167-186.
10. Yano, K., Kobayashi, S., *Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles.* J. Math. Soc. Japan, 18, 1966, 194-210, 236-246.
11. Yano, K., Ishihara, S., *Tangent and cotangent bundles.* Marcel Dekker Inc., New York, 1971.