15 Structures et connexions classiques sur une variété différentiable

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
s.I-a, Mat. XXII, 1976, f.2, 181-190.

L'étude de la structure et des connexions projectives sur une variété différentiable, commencée par H. Weyl [15] et E. Cartan [3] a préoccupé et préoccupe encore un grand nombre de géomètres. En poursuivant les travaux, consacrés à ce sujet, on peut croire que la simplicité et la dualité des notions et des résultats, qui ont fait de la géométrie projective l'une des disciplines géométriques les plus belles, ont disparu dans la géométrie projective des variétés.

Le but de ce travail est de donner une définition simple pour la structure et les connexions projectives et de mettre en évidence un principe de dualité dans la géométrie projective différentielle des variétés. A cette occasion nous alllons considérer aussi d'autres structures et connexions classiques sur une variété différentiable, qui peuvent être regardées comme subordonnèes respectivement à la structure et aux connexions projectives.

Les résultats principaux de ce travail ont été communique au IV-ème Congrès des mathématiciens d'expression latine, Bucarest, 17-24 sept. 1969.

1. Structures classiques associées à un espace vectoriel. Soit V un espace vectoriel à n-dimensions sur le corp R des réels.

Définition 1.1. On appelle *espace projectif canoniquement associé à l'espace vectoriel* V, l'espace projectif engendré [1] par l'espace vectoriel $R\times V$.

Il sera noté par $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R\times V)$. Si $\pi : R\times V \longrightarrow \mathcal{P}$ est la projection canonique, alors on peut distinguer sur $\mathcal{P}$: le point $z_0 = \pi(1,0)$ nommé *le centre*, l'hyperplan $c^0 = \pi(\{0\}\times V)$ nommé *l'hyperplan à l'infini* et la famille des repères projectifs,

$$z_0 = \pi(1,0),\ z_i = \pi(0, Z_i),\ (i,j,k = 1,2,...,n), \tag{1}$$

où $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$ est une base sur V, nommée *la famille des repères projectifs préferentiels.* Par des considérations duales on peut associer à l'espace vectoriel V^*, dual de V l'espace projectif $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}(R\times V^*)$ nommé *l'espace projectif dual à* $\mathcal{P}(R\times V)$. Le repère projectif de $\mathcal{P}^*$, défini par les relations

$$c^0 = \pi^*(1,0),\ c^i = \pi^*(0, C^i), \tag{2}$$

où $\{C^1, C^2, ..., C^n\}$ est la base sur V^*, duale à la base $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$, sur V, s'appelle *le corepère projectif préférentiel dual au repère* (1). On peut constater que $\mathcal{P}^*$ peut être identifié avec l'ensemble des hyperplans de $\mathcal{P}$. Dans cette identification, que nous allons faire dorénavant, le centre de $\mathcal{P}^*$ coïncide avec l'hyperplan à l'infini de $\mathcal{P}$ et l'hyperplan à l'infini de $\mathcal{P}^*$ coïncide avec le centre de $\mathcal{P}$. D'une manière plus générale dans cette identification, le point c^β de corepère $\{c^\alpha\}$, dual au repère $\{z_\alpha\}$, coïncide avec l'hyperplan $\{z_0, z_1, ..., z_{\beta-1}, z_{\beta+1}, ..., z_n\}$ de $\{z_\alpha\}$.

Définition 1.2. On appelle *espace affine, centro-projective* (*coaffine*) et *centro-affine, canoniquement associé à l'espace vectoriel* V, l'espace qui s'obtient de $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R\times V)$ en fixant respectivement l'hyperplan à l'infini c^0, le centre z_0 ou le couple (c^0, z_0) et en considérant le sousgroupe du groupe projectif qui conserve la figure correspondante.

Au lieu de dire que nous avons associé à V un espace projectif, affine, etc. nous dirons que nous avons défini sur V *une structure, projective, affine* etc. On obtient des structures affines, centro-projectives et centro-affines générales en prenant comme hyperplan à l'infini un hyperplan $h = \pi^*(1, H)$ avec H quelconque de V^* et comme centre un point $p = \pi(1, P)$ avec P quelconque de V et en considérant les transformations du groupe projectif qui conservent respectivement l'hyperplan h, le centre p ou le couple (h, p). En particulier, on obtient une structure *centro-affine semi-canonique* pour $P \neq 0$, $H = 0$ et une structure *cocentro-affine semi-canonique* pour $P = 0$, $H \neq 0$.

On peut considérer aussi d'autres structures *subordonnèes* à la strucure projective en fixant d'autres figures géométriques de $\mathcal{P}$ et en considérant les transformations du groupe projectif qui conservent la figure respective. De cette manière on obtient les structures: projective-métrique, projective-symplectique, axiale, biaxiale etc.

2. Structures classiques sur une variété différentiable. Soit M une variété differentiable réelle de dimension n et classe C^∞, u un point de M et V_u, V_u^* les espaces vectoriels tangent et cotangent à M en u.

Définition 2.1. Nous appellons *espace projectif tangent en u à M* l'espace projectif $\mathcal{P}_u = \mathcal{P}(R\times V_u)$ et *espace projectif cotangent en u à M* l'espace projectif $\mathcal{P}_u^* = \mathcal{P}(R\times V_u^*)$. On appelle *structure projective canonique sur M* la fonction qui associé à chaque point u de M l'espace projectif tangent $\mathcal{P}_u$. On considère en même temps la structure projective canonique duale, définie par la fonction qui fait correspondre à chaque $u \in M$ l'espace prejectif cotangent $\mathcal{P}_u^*$.

Parmi les repères projectifs préférentiels, dans les espaces projectifs tangents, nous pouvons distinguer les repères projectifs naturels qui sont définis par les cartes locales (U, u^i), c'-est-à-dire les repères

$$z_0 = \pi(1,0),\ z_i = \pi\left(0, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\ (i = 1, 2, ., ., n), \tag{3}$$

Les corepères projectifs naturels correspondants seront donnés par

$$c^0 = \pi^*(1,0),\ c^i = \pi^*(0, du^i),\ (i = 1, 2, , , , , n). \tag{4}$$

On constate aisément que le caractère préférentiel des repères et corepères naturels est conservé par le changement des coordonnées, ce qui est essentiel pour nos considérations.

Remarquons aussi que les origines des repères préférentiels sur M sont définies par le champ de vecteurs nuls et les hyperplans à l'infini par le champ de covecteurs nuls.

Définition 2.2. Nous appellons *structure affine, centro-projective* (*coaffine*), *centro-affine canonique sur* M, la fonction qui fait correspondre à chaque u de M, respectivement l'espace affine, centro-projective ou centro-affine associe canoniquement à l'espace vectoriel tangent en u à M.

On obtient sur M une structure affine, centro-projective ou centro-affine générale de classe C^∞, en considérant respectivement un champ de covecteurs H, un champ de vecteurs P ou un couple de champs (H, P) de classe C^∞ sur M, qui ne sont pas identiquement nuls. Une structure centro-affine semi-canonique s'obtient pour $H = 0$, $P \neq 0$ et une structure cocentro-affine semi-canonique pour $H = 0$, $P \neq 0$.

3. Connexions classiques sur une variété différentiable. Pour arriver d'une manière naturelle à la définition globale de la connexion projective et des autres connexions classiques nous partons de certaines considérations géométriques locales, analogues à celles que nous avons fait dans [6].

Définition 3.1. Etant donnée une courbe $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ différentiable, nous appellons *transport projectif le long de* γ, une famille $\mathcal{A}$ d'applications projectives bijectives entre les espaces projectifs tangents à M aux points de γ qui satisfait aux conditions:

P_1. Pour chaque couple ordonne de points $u_0, u \in \gamma$ il existe une application unique $\mathcal{A}_{u_0 u} \in \mathcal{A}$ telle que

$$\mathcal{A}_{u_0 u} : \mathcal{P}_{u_0} \longrightarrow \mathcal{P}_u;$$

P_2. Quel que soit $u_0 \in \gamma$, l'image d'un champ différentiable quelconque de points dans les espaces projectifs tangents le long de γ, par $\mathcal{A}_{u_0 u}$ et un champ différentiable.

P_3. Pour tous $u_0, u_1, u \in \gamma$ on doit avoir

$$\mathcal{A}_{u_0 u_1} \circ \mathcal{A}_{u_1 u} = \mathcal{A}_{u_0 u};$$

P_4. Quels que soient $u_0, u \in \gamma$ on a

$$\mathcal{A}^{-1}_{u_0 u} = \mathcal{A}_{u u_0}.$$

De ces conditions il résulte la propriété:

P_5. Pour chaque $u \in \gamma$ l'application $\mathcal{A}_{uu}$ est l'identité de $\mathcal{P}_u$.

En supposant γ contenue dans le domaine d'une carte locale (U, u^i) et donnée par les équations

(5) $$u^i = u^i(t), \ t \in (a, b)$$

alors, dans les repères projectifs naturels associés à cette carte, les transformations projectives $\mathcal{A}_{u_0 u}$ de la famille $\mathcal{A}$ sont donnèes par les équations

(6) $$x^\alpha(t) = A^\alpha_\beta(t, t_0) x^\beta(t_0),$$

nomées *les équations finies locales* du transport projectif $\mathcal{A}$, donné le long de γ.

Les fonctions $A^\alpha_\beta(t, t_0)$ doivent être différentiables dans les deux arguments et satisfaire, pour tous t_0, t de (a, b), aux conditions suivantes, resultant de P_1-P_5:

(7) $$\det[A^\alpha_\beta(t, t_0)] \neq 0, \ A^\alpha_\gamma(t, t_1) A^\gamma_\beta(t_1, t_0) = A^\alpha_\beta(t, t_0),$$
$$A^{-1\alpha}_\beta(t, t_0) = A^\alpha_\beta(t_0, t), \ A^\alpha_\beta(t, t) = \delta^\beta_\alpha.$$

En supposant en (5) t_0 fixé, on obtient, par dérivation et élimination de $x^\beta(t_0)$ les équations

$$(8) \qquad \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{dA^\alpha_\gamma}{dt}(t,t_0)A^\gamma_\beta(t_0,t)x^\beta(t).$$

En mettant

$$(9) \qquad \omega^\alpha_\beta = -dA^\alpha_\gamma(t,t_0)A^\gamma_\beta(t_0,t),$$

on constate que ces 1-formes ne dépendent pas de t_0. Par suite, compte tenu du fait que les coordonnèes projectives sont déterminèes à un facteur près, on en obtient que les fonctions $x^\alpha(t)$ satisfont aux équations

$$(10) \qquad \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{\omega^\alpha_\beta}{dt}\,x^\beta = \lambda x^\alpha,\ \ \alpha,\beta = 0,1,...,n,$$

où λ est une fonction de t. Les équations (10) sont appellées *les équations différentielles locales* du transport projectif $\mathcal{A}$, donné le long de γ.

Réciproquement, étant donnèes les équations (10) où ω^α_β sont des 1-formes différentiables sur γ et en notant par $A^\alpha_\beta(t,t_0)$ pour $\alpha,\beta = 0,1,...,n$, les $n+1$ solutions de (10) qui satisfont aux conditions $A^\alpha_\beta(t_0,t_0) = \delta^\alpha_\beta$ on obtient pour la solution générale de (10) l'expression (6). On constate aisément que les fonctions différentiables $A^\alpha_\beta(t,t_0)$ satisfont aux conditions P_1-P_5. Par suite,les équations (6) avec les conditions (7) et les équations (10) sont équivalentes pour la définition d'un transport projectif local le long de γ.

Un champ de points $x(u)$ sur γ sera appelle *invariant par le transport projectif $\mathcal{A}$ le long de γ* s'il satisfait à la condition

$$(11) \qquad \mathcal{A}_{u_0u}(x(u_0)) = x(u),\ \ \forall\, u_0, u \in \gamma.$$

Localement, un tel champ est caractérisé par le fait que les coordonnèes locales $x^\alpha(t)$ satisfont à (6) ou (10).

En passant aux coordonnèes non-homogènes $X^i = x^i/x^0$, $(x^0 \neq 0)$ et en posant

$$(12) \qquad \overline{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega^0_0,\ \ (\alpha,\beta = 0,1,...,n),$$

les équations (10) deviennent

$$(13) \qquad \frac{dX^i}{dt} + \frac{\overline{\omega}^i_0}{dt} + \frac{\overline{\omega}^i_j}{dt}\,X^j - \frac{\overline{\omega}^0_j}{dt}\,X^jX^i = 0,$$

nommées *les équations différentielles locales non-homogènes,* du transport projectif $\mathcal{A}$ le long de γ.

Par les considérations duales on peut définir un transport *coprojectif* le long de γ, comme une famille $\mathcal{A}^*$ d'applications projectives bijectives, entre les espaces projectifs cotangents aux points de γ, qui satisfont aux conditions correspondantes à P_1-P_4. Mais, en identifiant les espaces projectifs cotangents à M avec les espaces projectifs formes par les hyperplans des espaces projectifs tangents à M, on constate aisément qu'un transport projectif $\mathcal{A}$, le long de γ, détermine un transport coprojectif $\mathcal{A}^*$ avec les équations finies locales

$$(14) \qquad a_\alpha(t) = A^\beta_\alpha(t_0,t)a_\beta(t_0)$$

et les équations différentielles locales

$$(15) \qquad \frac{da_\alpha}{dt} - \frac{\omega^\beta_\alpha}{dt}\,a_\beta = \mu a_\alpha.$$

Il sera appellé le transport coprojectif *dual* au transport projectif $\mathcal{A}$.

Les équations différentielles locales non-homogènes de ce transport seront

$$\frac{dA_i}{dt} - \frac{\overline{\omega}_i^0}{dt} - \frac{\overline{\omega}_i^j}{dt} A_j + \frac{\overline{\omega}_0^j}{dt} A_j A_i = 0 \tag{16}$$

où $A_i = a_i/a_0$, $(a_0 \neq 0)$.

Un champ de hyperplans $a(u)$ sur γ sera appellé invariant par le transport coprojectif $\mathcal{A}^*$ le long de γ si

$$\mathcal{A}^*_{u_0 u}(a(u_0)) = a(u), \ \forall\, u_0, u \in \gamma. \tag{17}$$

Localement un tel champ est caractérise par le fait que ses coordonnèes homogènes satisfont aux équations (14) ou (15) ou que les coordonnèes non-homogènes satisfont à (16).

Des équations (13) et (16) il résulte qu'on peut définir un transport projectif et un transport coprojectif le long de chaque courbe différentiable γ, contenue dans le domaine d'une carte locale (U, u^i) si nous donnons sur U, $n(n+2)$ 1-formes différentielles

$$\overline{\omega}_0^i = \Gamma^i_{k0} du^k, \ \overline{\omega}_j^i = \Gamma^i_{jk} du^k, \ \overline{\omega}_j^0 = \Gamma^0_{jk} du^k, \tag{18}$$

où $\Gamma^i_{k0}, \Gamma^i_{kj}$ et Γ^0_{kj} sont des fonctions différentiables sur U.

En considérant alors une courbe $\gamma \subset U$, donnée par (5), les systèmes

$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{k0} \frac{du^k}{dt} + \Gamma^i_{kj} \frac{du^k}{dt} X^j - \Gamma^0_{kj} \frac{du^k}{dt} X^j X^i = 0, \tag{19}$$

$$\frac{dA_i}{dt} - \Gamma^0_{ki} \frac{du^k}{dt} - \Gamma^j_{ki} \frac{du^k}{dt} A_j + \Gamma^j_{k0} \frac{du^k}{dt} A_j A_i = 0, \tag{20}$$

donnent respectivement un transport projectif le long de γ et le transport coprojectif qui lui est dual.

Nous remarquons que par dualité les objets $\Gamma_0(\Gamma^i_{k0}), \Gamma(\Gamma^i_{kj}), \Gamma^0(\Gamma^0_{kj})$ se transforment par la loi

$$\Gamma_0 \longrightarrow -\Gamma^0, \ \Gamma \longrightarrow -\Gamma, \ \Gamma^0 \longrightarrow \Gamma_0. \tag{21}$$

On constate qu'au changement des coordonnèes locales,les objets $\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0$ se transforment respectivement comme un tenseur de type (1.1), un objet de connexion linéaire et un tenseur de type (0,2).

Les considérations précédentes nous suggèrent l'idée d'adopter la définition globale suivante pour une connexion projective.

Définition 3.2. Nous appellons *connexion projective de classe C^∞ sur la variété différentiable M*, un objet géométrique $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ donné dans les repères projectifs naturels associés à un atlas sur M par un champ de tenseurs Γ_0 de type (1.1), une connexion linéaire Γ et un champ de tenseurs Γ_0 de type (0,2), tous de classe C^∞.

Pour $\Gamma_0 = I$, le tenseur de Kronecker, on en obtient la connexion projective classique introduite par H. Weyl [15] et E. Cartan [3].

En adoptant une définition analogue pour une connexion coprojective, on peut constater qu'une connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ sur M, déterminé une connexion coprojective, donnée par $(-\Gamma_0, -\Gamma, -\Gamma^0)$ et nomée *la connexion coprojeetive duale à* $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$.

Des équations (19) il résulte que le transport projectif le long d'une courbe $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$, dans la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ est donné globalement par les équations

$$\nabla_{\dot\gamma} X + \Gamma_0(\dot\gamma) - \Gamma^0(\dot\gamma, X)X = 0, \ \pi(1, X) \in \mathcal{P}_{\gamma(t)}, \tag{22}$$

où γ est le champ de vecteurs tangents à γ et ∇ l'opérateur de la dérivation covariante défini par la connexion linéaire Γ. Par suite, un champ de points $x = \pi(1, X)$ sera invariant au transport projectif le long de γ si le champ de vecteurs X satisfait à (22).

Le transport coprojectif dual, le long de γ serait donné alors par les équations

$$\nabla_{\dot\gamma} A - \Gamma^0(\dot\gamma) + \Gamma_0(\dot\gamma, A)A = 0, \ \pi^*(1, A) \in \mathcal{P}^*_{\gamma(t)}, \tag{23}$$

c'est-à-dire, un champ d'hyperplans $a = \pi^*(1, A)$ sera invariant par le transport coprojectif le long de γ, défini par $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ si le champ de covecteurs A satisfait à (23).

Définition 3.3. Nous appellons *connexion affine, centro-projeetive (coaffine), centro-affine* etc. sur la variété différentiable M, une connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ sur M, qui laisse invariante respectivement la structure affine, centro-projective, centro-affine, etc. considerées sur M.

Des équations (22) et (23) il résulte que ces connexions sont caractérisées respectivement par les conditions.

- Connexion affine canonique $\Gamma^0 = 0$,
- Connexion centro-projective canonique $\Gamma_0 = 0$,
- Connexion affine générale $\Gamma^0(X) = \nabla_X H + \Gamma_0(X, H)H$,
- Connexion centro-projective générale $\Gamma^0(X) = -\nabla_X P + \Gamma^0(X, P)P$,
- Connexion centro-affine canonique (linéaire) $\Gamma^0 = \Gamma_0 = 0$,
- Connexion centro-affine semicanonique $\Gamma^0 = 0, \ \Gamma_0(X) = -\nabla_X P$,
- Connexion cocentro-affine semicanonique $\Gamma_0 = 0, \ \Gamma^0(X) = \nabla_X H$,

où X est un champ de vecteurs arbitraire sur M, H est le champ de covecteurs qui détermine le champ des hyperplans à l'infini $h = \pi^*(1, H)$ et P est le champ de vecteurs qui détermine le champ de centres $p = \pi(1, P)$.

Une connexion projective, affine ou centro-affine dont $\Gamma_0 = I$ sera appellée respectivement connexion projective, affine ou centro-affine *normale*. Nous remarquons que les connexions projectives normales dans ce sens ne coïncident pas avec les connnexions projectives normales de Cartan qui en sont un cas particulier.

4. L'objet de courbure et de torsion pour une connexion classique. Nous commençons par la définition suivante:

Définition 4.1. Une connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ sur M sera appellée *plate* si pour chaque point u de M il existe un voisinage U tel que le transport projectif de $\mathcal{P}_u$ en $\mathcal{P}_v$, pour tout $v \in U$, ne dépend pas de la courbe γ le long de laquelle on fait ce transport.

Cette condition est équivalente au fait que sur le domain de toute carte locale le système

$$\frac{\partial X^i}{\partial u^k} = -\Gamma^i_{k0} - \Gamma^i_{kj} X^j + \Gamma^0_{kj} X^j X^i \tag{24}$$

doit être complètement intégrable. C'est à dire

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial u^\ell \partial u^k} - \frac{\partial^2 X^i}{\partial u^k \partial u^\ell} = -R^i_{\ell k0} - R^i_{\ell kj} X^j + R^0_{\ell kj} X^j X^i = 0 \tag{25}$$

et par suite

$$R^i_{\ell k0} = 0, \;\; R^i_{\ell kj} = 0, \;\; R^0_{\ell kj} = 0, \tag{26}$$

où

$$\begin{aligned} R^i_{\ell k0} &= \partial_\ell \Gamma^i_{k0} - \partial_k \Gamma^i_{\ell 0} + \Gamma^i_{\ell h}\Gamma^h_{k0} - \Gamma^i_{kh}\Gamma^h_{\ell 0} = \nabla_\ell \Gamma^i_{k0} - \nabla_k \Gamma^i_{\ell 0} + T^h_{\ell k}\Gamma^i_{k0}, \\ R^i_{\ell kj} &= K^i_{\ell kj} + \Gamma^i_{\ell 0}\Gamma^0_{kj} - \Gamma^i_{k0}\Gamma^0_{\ell j} - (\Gamma^h_{\ell 0}\Gamma^0_{kh} - \Gamma^h_{k0}\Gamma^0_{\ell h})\delta^i_j, \\ R^0_{\ell kj} &= \partial_\ell \Gamma^0_{kj} - \partial_k \Gamma^0_{\ell j} - \Gamma^h_{\ell j}\Gamma^0_{kh} + \Gamma^h_{kj}\Gamma^0_{\ell h} = \nabla_\ell \Gamma^0_{kj} - \nabla_k \Gamma^0_{\ell j} + T^h_{\ell k}\Gamma^0_{hj}, \end{aligned} \tag{27}$$

et K, T sont les tenseurs de courbure et de torsion de la connexion linéaire Γ.

Les objets $R_0(R^i_{\ell k0}), R(R^i_{\ell kj})$ et $R^0(R^0_{\ell kj})$ sont des champs de tenseurs respectivement de type (1,2), (1,3) et (0,3) sur M. Ils ont les expressions globales suivantes:

$$\begin{aligned} R_0(X,Y) &= \nabla_X(\Gamma_0(Y)) - \nabla_Y(\Gamma_0(X)) - \Gamma_0([X,Y]) = \\ &= (\nabla_X \Gamma_0)Y - (\nabla_Y \Gamma_0)X + \Gamma_0(T(X,Y)), \\ R(X,Y) &= K(X,Y) + \Gamma_0(X) \otimes \Gamma^0(Y) - \Gamma_0(Y) \otimes \Gamma^0(X) - \\ &- [\langle \Gamma_0(X), \Gamma^0(Y)\rangle - \langle \Gamma_0(Y), \Gamma^0(X)\rangle] \otimes I, \\ R^0(X,Y) &= \nabla_X(\Gamma^0(Y)) - \nabla_Y(\Gamma^0(X)) - \Gamma^0([X,Y]) = \\ &= (\nabla_X \Gamma^0)Y - (\nabla_Y \Gamma^0)X + \Gamma^0(T(X,Y)), \end{aligned} \tag{28}$$

Nous sommes conduits à la définition suivante

Définition 4.2. Nous appellons *objet de courbure et de torsion pour une connexion projective* $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ *sur* M, l'objet géométrique défini dans les repères projectifs naturels par les tenseurs R_0, R et R^0, donnés par (28).

R_0 sera appelle le *tenseur de torsion,* R le *tenseur de courbure* et R^0 le *tenseur de cotorsion.*

On peut énoncer maintenant

Théorème 4.1. *Une connexion projective est plate si et seulement si son objet de courbure et de torsion est nul.*

En considérant la connexion coprojective duale à $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ on déduit qu' elle est plate en même temps que $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ et que par dualité l'objet de courbure et de torsion se transforme selon la loi

$$R_0 \longrightarrow -R^0, \;\; R \longrightarrow -R, \;\; R^0 \longrightarrow -R_0. \tag{29}$$

Pour une connexion affine $(\Gamma_0, \Gamma, 0)$ on a $R^0 = 0$ et $R = K$. Pour une connexion centro-projective $(0, \Gamma, \Gamma^0)$ nous avons $R = K$, $R_0 = 0$. Dans le cas d'une connexion centroaffine (linéaire) $(0, \Gamma, 0)$ nous avons $R^0 = R_0 = 0$ et $R = K$. Pour une connexion centroaffine semicanonique $(-\nabla P, \Gamma, 0)$ on a $R_0(X,Y) = K(X,Y)P$, $R = K$, $R^0 = 0$ et pour une connexion cocentro-affine semicanonique $(0, \Gamma, \nabla H)$ on a $R_0 = 0$, $R = K$ et $R^0(X,Y) = K(X,Y)H$. Enfin, pour une connexion projective, affine ou centro-affine normale on a $R_0 = T$.

5. La carte dans une connexion projective, le long d'une courbe. Soit $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ une courbe différentiable par morceaux sur M.

Définition 5.1. On appelle *la carte des espaces projectifs tangents le long de la courbe γ sur l'espace projectif tangent en un point $\gamma(t_0) \in \gamma$, dans la connexion projective* $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ la famille des applications projectives $\mathcal{A}_{\gamma(t)\gamma(t_0)} : \mathcal{P}_{\gamma(t)} \longrightarrow \mathcal{P}_{\gamma(t_0)}$, $t \in (a, b)$, définies par le transport projectif le long de γ dans la connexion donnée.

Si γ apartient à un voisinage de coordonnèes U et est donnée par les équations (5), alors à un point de coordonnèes $x^\alpha(t)$ dans le repère naturel en $\mathcal{P}_{\gamma(t)}$, correspond par le transport projectif $\mathcal{A}_{\gamma(t)\gamma(t_0)}$ le point de coordonnèes $\widetilde{x}^\alpha(t)$ par rapport au repère naturel en $P_{\gamma(t_0)}$, données par les équations

$$\widetilde{x}^\alpha(t) = A^\alpha_\beta(t_0, t)x^\beta(t). \tag{30}$$

qui sont appellées *les équations locales finies de la carte le long de γ*. A la famille des repères naturels $\{z_\alpha(t)\}$ aux points de γ il correspond, par suite, la famille des repères $\{\widetilde{z}_\alpha(t)\}$ situés dans $\mathcal{P}_{\gamma(t_0)}$ donnés par

$$\widetilde{z}_\alpha(t) = A^\beta_\alpha(t_0, t)z_\beta(t_0), \tag{31}$$

Par dérivation et élimination de $z_\beta(t_0)$ on en obtient les équations

$$\frac{d\widetilde{z}_\alpha}{dt} = \frac{\omega^\beta_\alpha}{dt}\,\widetilde{z}_\beta, \tag{32}$$

nommées *les équations différentielles locales de mouvement du repère mobil.*

Par dualité on obtient, pour la carte des espaces projectifs cotangents le long de γ, les équations locales finies

$$\widetilde{a}_\alpha(t) = A^\beta_\alpha(t, t_0)a_\beta(t_0) \tag{33}$$

et les équations de mouvement du corepère mobile

$$\frac{d\widetilde{c}^\alpha}{dt} = -\frac{\omega^\alpha_\beta}{dt}\,\widetilde{c}^\beta. \tag{34}$$

Enfin, par des particularisations convenables, on obtient les équations de la carte, dans une connexion affine, centro-projective ou centro-affine, le long d'une courbe γ.

6. Equations de structure et identités de Bianchi. Pour donner une autre interprétation géométrique de l'objet de courbure et de torsion nous considérons une variété à deux dimensions M_2 sur M, contenue dans un voisinage de coordonnèes U et donnée par les équations

$$u^i = u^i(t, \tau), \;\; t, \tau \in (a, b). \tag{35}$$

Considérons le point $u \in M_2$, correspondant à $t = \tau = 0$ et les champs de vecteurs

$$d = \frac{\partial}{\partial t}\,dt, \;\; \delta = \frac{\partial}{\partial \tau}\,d\tau, \tag{36}$$

où dt et $d\tau$ sont des constantes dont les puissances ≥ 3 sont négligeables. Soit $uu'u''u'''$ le "parallélogramme infinitésimal" sur M_2 déterminé par les courbes $t = 0$, $\tau = 0$, $t = dt$ et $\tau = d\tau$. Dans la carte le long de $uu'u''$ on obtient pour image du repère naturel $\{z''_\alpha\}$ associé à u'' le repère $\{\widetilde{z}''_\alpha\}$ donné par

$$\widetilde{z}''_\alpha = z_\alpha + dz_\alpha + \delta z_\alpha + \delta dz_\alpha.$$

Dans la carte le long de $uu'''u''$ on obtient pour l'image du repère $\{z''_\alpha\}$ associè à u'', le repère $\{\widetilde{z}''_{1\alpha}\}$ donné par

$$\widetilde{z}''_{1\alpha} = z_\alpha + \delta z_\alpha + dz_\alpha + d\delta z_\alpha.$$

Compte tenu des équations (31), on obtient pour la variation Δz_α des images du repere $\{z''_\alpha\}$ en u'', dans les cartes le long de $uu'''u''$ et $uu'u''$, l'expression

$$\Delta z_\alpha = \widetilde{z}''_{1\alpha} - \widetilde{z}''_\alpha = -\Omega^\beta_\alpha(d,\delta) z_\beta, \tag{37}$$

où

$$\Omega^\beta_\alpha = d\omega^\beta_\alpha + \omega^\beta_\gamma \wedge \omega^\gamma_\alpha. \tag{38}$$

Les 2-formes

$$\overline{\Omega}^\beta_\alpha = \Omega^\beta_\alpha - \delta^\beta_\alpha \Omega^0_0 \tag{39}$$

s'expriment seulement avec les 1-formes $\overline{\omega}^\beta_\alpha$ et leurs différentielles extérieures. Ces 2-formes s'appellent les 2-formes de courbure et de torsion et satisfont aux conditions

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}^i_0 &= d\overline{\omega}^i_0 + \overline{\omega}^i_h \wedge \overline{\omega}^h_0 = \frac{1}{2}\, R^i_{\ell k 0} du^\ell \wedge du^k,\\
\overline{\Omega}^i_j &= d\overline{\omega}^i_j + \overline{\omega}^i_h \wedge \overline{\omega}^h_j - \overline{\omega}^0_j \wedge \overline{\omega}^i_0 - \delta^i_j \overline{\omega}^0_h \wedge \overline{\omega}^h_0 = \frac{1}{2}\, R^i_{\ell k j} du^\ell \wedge du^k,\\
\overline{\Omega}^0_j &= d\overline{\omega}^0_j + \overline{\omega}^0_h \wedge \overline{\omega}^h_j = \frac{1}{2}\, R^0_{\ell k j} du^\ell \wedge du^k.
\end{aligned} \tag{40}$$

nommés *les équations de structure* de la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$.

Par des considérations duales, on obtient pour la variation des images du corepère naturel en u'', le long de $uu'''u''$ et $uu'u''$

$$\Delta c^\alpha = -\Omega^\alpha_\beta c^\beta. \tag{41}$$

Par suite, les images du repère (corepère) naturel au point u'', dans la carte le long de $uu'u''$ et $uu'''u''$, coïncident pour tout $u \in M$ et tout parallélogramme infinitésimal $uu'u''u'''$ si et seulement si $\overline{\Omega}^\alpha_\beta = 0$, c'est-à-dire la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ est plate. Les points origines des images du repère en u'' coïncident si et seulement si $\overline{\Omega}^i_0 = 0$ et par suite la connexion projective est sans torsion. Enfin, les hyperplans à l'infini de ces images coïncident si et seulement si $\overline{\Omega}^0_j = 0$, c'est-à-dire la connexion $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ est sans cotorsion.

Sans nous arrêter aux équations de structure pour les connexions affines, centro-projectives ou centro-affines nous allons établir les identités de Bianchi pour une connexion projective. Des équations (40) il résulte par différentiation extérieure les identités

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{cicl}(k,\ell,m)} (\nabla_k R^i_{\ell m 0} + T^h_{k\ell} R^i_{hm0} - R^i_{k\ell h}\Gamma^h_{m0}) = 0,\\
&\sum_{\mathrm{cicl}(k,\ell,m)} [\nabla_k R^i_{\ell m j} + T^h_{k\ell} R^i_{hmj} - (R^i_{k\ell 0}\Gamma^0_{mj} - R^0_{k\ell j}\Gamma^i_{m0}) - (R^h_{k\ell 0}\Gamma^0_{mh} - R^0_{k\ell h}\Gamma^h_{m0})\delta^i_j] = 0,\\
&\sum_{\mathrm{cicl}(k,\ell,m)} (\nabla_k R^0_{\ell m j} + T^h_{k\ell} R^0_{hmj} - R^h_{k\ell j}\Gamma^0_{mh}) = 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Globalement, les identités de Bianchi peuvent s'écrire sous la forme

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{cicl}(X,Y,Z)} [(\nabla_X R_0)(Y,Z) + R_0(T(X,Y),Z) - R(X,Y)\Gamma_0(Z)] = 0,\\
&\sum_{\mathrm{cicl}(X,Y,Z)} [(\nabla_X R(Y,Z) + R(T(X,Y),Z) - (R_0(X,Y) \otimes \Gamma^0(Z)-\\
&\quad -R^0(X,Y)\otimes\Gamma_0(Z)) - (\langle R_0(X,Y),\Gamma^0(Z)\rangle - \langle R^0(X,Y),\Gamma_0(Z)\rangle)\otimes I = 0,\\
&\sum_{\mathrm{cicl}(X,Y,Z)} [(\nabla_X R^0(Y,Z) + R^0(T(X,Y),Z) - R(X,Y)\Gamma^0(Z)] = 0.
\end{aligned}
$$

Les identités de Bianchi se réduisent pour une connexion affine $(\Gamma_0, \Gamma, 0)$ à (43_1) et

$$
(44)\qquad \sum_{\mathrm{cicl}(X,Y,Z)} [(\nabla_X R)(Y,Z) + R(T(X,Y),Z)] = 0
$$

et pour une connexion centro-projective $(0, \Gamma, \Gamma^0)$ à (43_3) et (44).

Dans le cas d'une connexion centro-affine (linéaire) $(0, \gamma, 0)$ les identités de Bianchi se réduisent à (44). Enfin, pour une connexion affine normale $(I, \Gamma, 0)$ les identités (43) se réduisent à (44) et

$$
(45)\qquad \sum_{\mathrm{cicl}(X,Y,Z)} [(\nabla_X T)(Y,Z) + T(T(X,Y),Z) - R(X,Y)Z] = 0,
$$

qui d'habitude sont considerées les identités de Bianchi pour la connexion linéaire Γ.

7. Géodésiques d'une connexion classique. A une connexion projective on peut attacher deux familles de courbes qui seront appellées géodésiques et cogéodésiques et qui sont duales entre elles.

Définition 7.1. Nous disons qu'une courbe $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ est une *géodésique* pour la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$, si les images dans la carte des centres $z_0(t)$ des espaces projectifs tangents $\mathcal{P}_{\gamma(t)}$ aux points de γ, sont situés sur la même droite.

C'-est-à-dire, il existe les fonctions réels α et β telles que

$$
(46)\qquad \frac{d^2\tilde{z}_0}{dt^2} = \alpha\,\frac{d\tilde{z}_0}{dt} + \beta\tilde{z}_0
$$

Compte tenu de (31) cette condition se réduit localement à

$$
(47)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{\omega}_0^i}{dt}\right) + \frac{\overline{\omega}_h^i}{dt}\,\frac{\overline{\omega}_0^h}{dt} = \lambda\,\frac{\overline{\omega}_0^i}{dt},
$$

qui globalement peut s'écrire sous la forme

$$
(48)\qquad \nabla_{\dot\gamma}(\Gamma_0(\dot\gamma)) = \lambda\Gamma_0(\dot\gamma).
$$

Par suite, on a

Théorème 7.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ soit géodésique pour la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ est qu'il existe une fonction λ tel que le champ de vecteurs $\dot\gamma$ tangents à γ, satisfait à l'équation* (48).

Par des considérations duales nous arrivons à la

Définition 7.2. Nous disons que la courbe $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$ est une *cogéodésique* pour la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ si les images dans la carte, des hyperplans, à l'infini $c^0(t)$ des espaces projectifs tangents $\mathcal{P}_{\gamma(t)}$ aux points de $\dot{\gamma}$, passent par la même hyperdroite (sous-espace de codimension 2).

Par suite, il existe les fonctions réelles α' et β' telles que

$$\frac{d^2\widetilde{c}^0}{dt^2} = \alpha' \frac{d\widetilde{c}^0}{dt} + \beta'\widetilde{c}^0. \tag{49}$$

D'après (34) cette condition se réduit localement à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{\omega}_j^0}{dt}\right) - \frac{\overline{\omega}_j^h}{dt}\,\frac{\overline{\omega}_h^0}{dt} = \mu\,\frac{\overline{\omega}_j^0}{dt}, \tag{50}$$

qui globalement prend la forme

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(\Gamma^0(\dot{\gamma})) = \mu\Gamma^0(\dot{\gamma}). \tag{51}$$

Nous avons, par suite

Théorème 7.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$ soit cogéodésique pour la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ est qu'il existe la fonction μ telle que le champ de vecteurs $\dot{\gamma}$ tangents à γ satisfait à l'équation* (51).

Pour une connexion affine $(\Gamma_0, \Gamma, 0)$ les géodésiques coïncident avec les géodésiques de toute connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ et les cogéodésiques sont indéterminées. Pour une connexion centro-projective $(0, \Gamma, \Gamma^0)$ les géodésiques sont indéterminèes et les cogéodésiques coïncident avec les cogéodésiques de la connexion projective $(\Gamma_0, \Gamma, \Gamma^0)$ quel que soit Γ_0. La connexion centro-affine (linéaire) $(0, \Gamma, 0)$ a les géodésiques et les cogéodésiques indéterminées. Enfin, pour la connexion affine normale $(I, \Gamma, 0)$, les géodésiques sont donnèes par

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = \lambda\dot{\gamma}, \tag{52}$$

c'-est-à-dire elles sont les courbes considerées d'habitude comme géodésiques de la connexion linéaire Γ.

Nous terminons ce travail avec la remarque que la méthode utilisée ici peut être appliquée à l'étude des autres structures et connexions subordonnèes respectivement à la structure et aux connexions projectives sur une variété différentiable.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N., *Eléments de mathématique. Algèbre*, Paris, 1958.
2. Bortolotti, E., Hlavaty, V., *Contributti alla teoria delle connexioni.* Ann. di Mat. (4), 15 (1936), p. 1-45, 129-154.
3. Cartan, E., *Sur les variétés à connexion projective.* Bull. Soc. Mat. France 52 (1924) p. 205-241.
4. Cattaneo–Gasparini Ida, *Sulle connessioni infinitesimali nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n.* Rend. Mat. Roma, 17 (1958), p. 326-404.
5. Cattaneo–Gasparini Ida, *Sulle connessioni proiettive.* Ann. di Mat. vol. 50 (1960) p. 467-473.
6. Cruceanu, V., *Contribuţii la studiul spaţiilor cu conexiune centro-afină.* Teză, Iaşi, 1964.

7. Cruceanu, V., *Sur les espaces à connexion centro-affine.* C. R Acad. Sci. Paris, t. 260 (1965), p. 6273-6274.
8. Hangan, Th., *Sur les connexions projectives.* Rév. math. pures et appl. t. II, nr. 2, (1958), p. 265-276.
9. Kobayashi, S. and Nagano, T., *On projective connexions.* J. Math. and Mech. vol. 13, nr. 2 (1964) p. 215-235.
10. Murărescu, Gh., *Sur la théorie globale des connexions projectives.* C. R. Acad. Sci. Paris, T. 269 (1969) p. 141-143.
11. Radziszewski, K., *On projective connexion locally.* Part I-III. Bull. Acad. Polon. Sci, vol. XXII nr. 4 (1974), p. 397-414.
12. Szybiak, A., *Centro-projective connexions*, Czechoslovak Math. J. 21 (1971), p. 99-108.
13. Vaisman, Izu, *Contributions à la géométrie différentielle projective-symplectique.* Ann. Sci. Univ. Jassy, Matematica, Monografii 1 (1966).
14. Vrănceanu, Gh., *Leçons de géométrie différentielle.* vol. I-II, Bucureşti, 1957.
15. Weyl, H., *Zur Infinitesimalgeometrie. Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.* Göttingen Nach. (1921), 99-122.
16. Yano, K., *Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des "paths".* Ann. Sci. Univ. de Jassy 24 (1938) p. 395-463.