16 La géométrie et la théorie des catégories

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
Tomul XXV, s. I-a, 1979, f. 1, 201-206.

1. Introduction.

La théorie des catégories réprésente la synthèse la plus générale et profonde dans le développement de la mathématique et elle constitue l'instrument fondamental pour la structuration de la mathématique actuelle. En particulier, la notion de catégorie nous permet de définir avec beaucoup de rigueur et de clarté l'objet de nombreuses disciplines mathématiques et celui de foncteur, d'établir d'une manière precise les rapports entre ces disciplines.

Le but de ce travail est d'établir certaines implications de la théorie des catégories dans la géométrie classique. Le point de vue prédominant dans ce domaine, qui a joué un rol fondamental pour le développement de la géométrie dans le dernier siècle, est celui de F. Klein, ou autrement dit celui de la théorie des groupes. Conformément à ce point de vue, étant donné un espace S doué d'une certaine structure et un groupe G d'automorphismes de cette structure, la géométrie de l'espace S, par rapport au groupe G, est l'éetude de ces propriétés des figures de S qui sont invariantes aux transformations de G. Or, en géométrie nous n'étudions pas d'habitude un seul espace, mais une classe d'espaces d'un certain type. D'autre part, nous considérons non seulement des tranformations bijectives d'un espace en lui même, mais des transformations qui, en général, ne sont pas bijectives et qui transforment un espace donné en un autre de la même classe. Il en résulte que l'objet de la géométrie est beaucoup plus général que celui considere par F. Klein. Le point de vue de la théorie des groupes est aussi limité en ce qui concerne le rapport entre les diverses géométries parce qu'il se refère seulement à certaines relations d'isomorphisme ou de subordination assez restrictives. Nous allons montrer que la théorie des catégories nous offre un point de vue plus général et precis pour définir les diverses géométries et pour établir les rapports entre celles-ci, ainsi que, entre la géométrie et d'autres disciplines mathématiques.

Dans ce qui suit nous considérons seulement des catégories dont les objets sont des ensembles doués de certaines structures et les morphismes sont des applications qui conservent ces structures. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories de ce type et supposons que les objets de $\mathcal{C}$ s'obtiennent des objets de $\mathcal{D}$ par l'adjonction d'une certaine structure supplémentaire σ et que les morphismes de $\mathcal{C}$ sont des morphismes de $\mathcal{D}$ qui satisfont à la condition de conserver la structure σ.

Un *foncteur d'oubli* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ sera un foncteur qui associé à chaque objet de $\mathcal{C}$ l'objet de $\mathcal{D}$ avec le même ensemble support et à chaque morphisme de $\mathcal{C}$, le morphisme de $\mathcal{D}$ réprésenté par la même application mais en omettant le fait qu'il conserve la structure σ. Nous dirons que la catégorie $\mathcal{C}$ est subordonnée à la catégorie $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un foncteur d'oubli de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Dans ce cas nous dirons aussi que la discipline mathématique qui a comme objet d'étude la catégorie $\mathcal{C}$ est *subordonnée* à la discipline correspondante à $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{D}$ alors le foncteur injection canonique $i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ peut être regardé comme un foncteur d'oubli et par suite toute sous-catégorie de $\mathcal{D}$ est subordonnée à $\mathcal{D}$. Une catégorie $\mathcal{C}$ est *isomorphe* à une catégorie $\mathcal{D}$ s'il existe un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ qui soit un isomorphisme, c'est-à-dire plein, fidel et bijectif. Les disciplines mathématiques correspondantes à deux catégories isomorphes seront appellées aussi isomorphes. Une catégorie $\mathcal{C}$ est *équivalente* à une catégorie $\mathcal{D}$ s'il existe un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ qui soit plein et fidel et tel que chaque objet B de $\mathcal{D}$ soit isomorphe à un objet de la forme $F(A)$, avec A objet de $\mathcal{C}$. Les disciplines mathématiques correspondantes à deux catégories équivalentes seront appellées aussi équivalentes. Un *squelette* pour une catégorie $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ avec la propriété que chaque objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à un objet et à un seul de $\mathcal{C}$. Il en résulte que l'injection canonique de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ est une équivalence et par suite, toute catégorie est équivalente à chacun des ses squelettes.

Dans la fondation de la géométrie, l'algèbre joue un rôle important. C'est pour cela que nous commençons par certaines considérations sur

2. L'algèbre linéaire.

Pour plus de simplicité, nous considérons seulement des espaces réels et de dimension finie. En prenant les espaces vectoriels, comme objets et les transformations linéaires comme morphismes on obtient la catégorie $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels. L'étude de cette catégorie est *l'algèbre linéaire.* Nous remarquons le foncteur du passage au dual qui est un antiautomorphisme involutif de $\mathcal{V}$ et qui joue un rôle fondamental dans les géométries centro-affine et projective.

Un espace vectoriel euclidien est un couple (V, g) où V est un espace vectoriel et g une forme bilinéaire symétrique et positivement définie – produit scalaire – sur V. Une application linéaire $T : (V, g) \longrightarrow (V', g')$ est *orthogonale*, si elle conserve le produit scalaire. Les espaces vectoriels euclidiens et les transformations orthogonales constituent la catégorie des espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{V}_e$ et leur étude est *l'algèbre linéaire euclidienne.* Le foncteur d'oubli $\alpha : \mathcal{V}_e \longrightarrow \mathcal{V}$, qui s'obtient d'une manière évidente, nous montre que l'algèbre linéaire euclidienne est subordonée à l'algèbre linéaire.

Dans l'ensemble des formes bilinéaires symétriques, positivement définies, sur un espace vectoriel V, on peut définir la relation d'équivalence: $g_1 \sim g_2$ si, et seulement si, il existe $k \in R^*_+$ tel que $g_2 = kg_1$. Un *espace vectoriel conforme euclidien* est un couple $(V, [g])$ où V est un espace vectoriel et $[g]$ une classe de formes bilinéaires symétriques positivement définies, équivalentes. Une *transformation conforme orthogonale* $T : (V, [g]) \longrightarrow (V', [g'])$ est une transformation linéaire avec la propriété qu'il existe $k \in R^*_+$ tel que

$$g'(T\vec{u}, T\vec{v}) = kg(\vec{u}, \vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Les espaces vectoriels conformes euclidiens et les transformations conformes orthogonales, déterminent la catégorie des espaces vectoriels conformes euclidiens $V_{c.e}$. Leur étude est *l'algèbre linéaire conforme euclidienne.* Evidement l'algèbre linéaire conforme euclidienne est subordonée à l'algèbre linéaire. Nous avons aussi le foncteur $\beta : \mathcal{V}_e \longrightarrow \mathcal{V}_{c.e}$ donné par $\beta(V, g) = (V, [g])$ et $\beta(T) = T$, qui est fidel et injectif, c'est-à-dire un plongement de $\mathcal{V}_e$ en $\mathcal{V}_{c.e}$.

Un *espace vectoriel pseudo-euclidien hyperbolique normal* est un couple (V, g) où V est un espace vectoriel et g une forme bilinéaire symétrique du type hyperbolique normal. Une transformation linéaire entre deux espaces de ce type, qui conserve le produit scalaire correspondant, s'appelle *transformation pseudo-orthogonale.* On en obtient la catégorie des espaces vectoriels pseudo-euclidiens hyperboliques normaux, $\mathcal{V}_{p.e.h.n.}$ et son étude est l'algèbre linéaire pseudo-euclidienne hyperbolique, qui est aussi subordonnée à l'algèbre linéaire.

On peut définir aussi *les espaces vectoriels conformes pseudo-euclidiens hyperboliques normaux et les transformations conformes pseudo-orthogonales,* considérer leur catégorie $\mathcal{V}_{c.p.e.h.n}$ et l'algèbre linéaire correspondante.

De la même manière on peut définir l'algèbre linéaire pseudo-euclidienne du type général, l'algèbre linéaire symplectique, etc., qui sont aussi subordonnèes a l'algèbre linéaire.

Il est utile de remarquer qu'on peut prendre comme représentant pour une classe d'espaces vectoriels isomorphes, l'espace vectoriel arithmétique correspondant. Par suite, les espaces vectoriels arithmétiques et leurs morphismes en $\mathcal{V}$ déterminent un squelette $\mathcal{V}_a$ pour la catégorie $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels. L'étude de ce squelette sera appellée le *modele arithmétique* de l'algèbre linéaire. Par suite l'algèbre linéaire est équivalente à son modèle arithmétique.

En considérant sur les espaces vectoriels arithmétiques les structures euclidiennes, conforme euclidienne, etc., canoniques, on déduit de la même manière que les algèbres linéaires euclidienne, conforme euclidienne etc. sont équivalentes avec leurs modèles arithmétiques.

3. La géométrie affine.

Soit A un ensemble et V un espace vectoriel. Nous dirons qu'une application $\rho : A\times A \longrightarrow V$, notée $\rho(p,q) = \overrightarrow{pq}$, déterminé sur A une structure d'espace affine associé à V si, et seulement si, elle satisfait aux conditions:

1. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}, \ \forall p,q,r \in A;$

2. $\exists o \in A$, tel que l'application $\varphi_0 : A \longrightarrow V$ donnée par $\varphi_0(p) = \overrightarrow{op}$ soit bijective. V s'appelle *l'espace vectoriel directeur de* A.

Une application $\tau : (A,V,\rho) \longrightarrow (A',V',\rho')$ entre deux espaces affines s'appelle *transformation affine,* s'il existe $o \in A$ tel que l'application $T : V \longrightarrow V'$ donnée par $T(\vec{u} = \overrightarrow{op}) = \overrightarrow{\tau(o)\tau(p)}$, $\forall \vec{u} \in V$ soit linéaire. T ne dépend pas de o et s'appelle la transformation linéaire induite par T. Les espaces et les transformations affines constituent la catégorie $\mathcal{A}$ des espaces affines et son étude, est *la géométrie affine.*

En associant à chaque espace affine, l'espace vectoriel directeur et à chaque transformation affine, la transformation linéaire induite on obtient un foncteur $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ qui est plein et surjectif et qui met en évidence une liaison étroite entre la géométrie affine et l'algèbre linéaire. Pour tout espace vectoriel V, l'application $\rho_0 : V\times V \longrightarrow V$ donnée, par $\rho_0(\vec{u},\vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$, détermine une structure affine sur V, nomée la structure affine canonique de V. Si (A,V,ρ) est un espaces affine associe à V, alors l'application $\varphi_0 : (A,V,\rho) \longrightarrow (V,V,\rho_0)$ donnée par 2), est un isomorphisme affine. En mettant $\delta(V) = (V,V,\rho_0)$, $\delta(T) = T$, on obtient un foncteur $\delta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{A}$ qui est un plongement de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{A}$, avec la propriété que tout objet de $\mathcal{A}$ est isomorphe à un objet de la forme $\delta(V)$, avec V objet de $\mathcal{V}$. Ce foncteur n'est pas plein et par suite il n'est pas une équivalence. On a aussi $\gamma \circ \delta = 1_{\mathcal{V}}$.

On constate aisément que tout repère affine détermine un isomorphisme de l'espace affine (A,V,ρ) sur l'espace affine arithmétique correspondant (R^n,R^n,ρ_0). Par suite, les espaces affines arithmétiques avec leurs morphismes en $\mathcal{A}$, constituent un squelette de $\mathcal{A}$. Il en résulte que la géométrie affine est équivalente àvec son modèle arithmétique.

On appelle *espace centro-affine* (A, V, ρ, o) un espace affine (A, V, ρ) avec un point fixé $o \in A$. Une application affine $\tau : (A, V, \rho, o) \longrightarrow (A', V', \rho', o')$ s'appelle *transformation centro-affine* si on a $\tau(o) = o'$. Les espaces et les transformations centro-affines constituent la catégorie $\mathcal{C}_a$ des cspaces centro-affines. *La géométrie centro-affine* est l'étude de cette catégorie. Evidement la géométrie centro-affine est subordonnée à la géométrie affine. Remarquons que tout espace vectoriel V admet la structure centro-affine canonique $(V, V, \rho_0, \vec{o})$ et que si (A, V, ρ, o) est un espace centro-affine associé à V, alors l'application $\varphi_0 : (A, V, \rho, \vec{o}) \longrightarrow (A, V, \rho, o)$ donnée par 2) est un isomorphisme centro-affine. En mettant $\varepsilon(V) = (V, V, \rho_0, o)$ et $\varepsilon(T) = T$ on obtient un foncteur covariant $\varepsilon : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}_a$ qui est une équivalence. Par suite, l'algèbre linéaire est équivalente àvec la géométrie centro-affine. Mais comme la géométrie centro-affine est subordonnée à la géométrie affine il en résulte que l'algèbre linéaire peut être considerée comme subordonnée à la géométrie affine.

On appelle *espace affine euclidien* un espace affine dont l'espace vectoriel associé est euclidien. Une *transformation isométrique* est une transformation affine entre deux espaces affines euclidiens avec la propriété que la transformation linéaire induite est orthogonale. Les espaces affines euclidiens et les transformations isométriques déterminent la catégorie $\mathcal{A}_e$ des espaces affines euclidiens et son étude est la géométrie euclidienne (géométrie métrique euclidienne, dans la terminologie classique).

Un *espace affine conforme euclidien* est un espace affine dont l'espace vectoriel directeur est conforme euclidien. On appelle *similitude* une transformation affine entre deux espaces affines conformes euclidiens avec la propriété que la transformation linéaire induite est conforme orthogonale. Les espaces affines conformes euclidiens et les similitudes constituent la catégorie $\mathcal{A}_{c.e}$ des espaces conformes euclidiens. L'étude de cette catégorie est la géométrie conforme euclidienne (géométrie euclidienne dans la terminologie classique). Nous remarquons que la géométrie définie par le système axiomatique de Hilbert est la *géométrie conforme euclidienne*, parce que la métrique de l'espace est définie a un facteur pres, vu que l'unité de mesure n'est pas uniquement déterminée. Les géométries affines euclidienne et conforme euclidienne sont évidement subordonnèes à la géométrie affine. Il y a aussi le foncteur $\beta : \mathcal{A}_e \longrightarrow \mathcal{A}_{c.e}$ donné par $\beta(A, V, \rho, g) = (A, V, \rho, [g])$ et $\beta(\tau) = \tau$, qui est un plongement de $\mathcal{A}_e$ en $\mathcal{A}_{c.e}$. On peut considérer aussi les foncteurs notés par γ de $\mathcal{A}_e$ à $\mathcal{V}_e$ et de $\mathcal{A}_{c.e}$ à $\mathcal{V}_{c.e}$ donnés respectivement par

$$\gamma(A, V, \rho, g) = (V, g), \ \gamma(\tau) = \tau; \ \gamma(A, V, \rho, [g]) = (V, [g]), \ \gamma(\tau) = T,$$

qui expriment la liaison intime entre la géométrie affine euclidienne et l'algèbre linéaire euclidienne et entre la géométrie affine conforme euclidienne et l'algèbre linéaire conforme euclidienne. Il existe encore les foncteurs δ de $\mathcal{V}_e$ à $\mathcal{A}_e$ et de $\mathcal{V}_{c.e}$ à $\mathcal{A}_{c.e}$ donnés respectivement par

$$\delta(V, g) = (V, V, \rho_0, g), \ \delta(T) = T; \ \delta(V, [g]) = (V, V, \rho_0; [g], \ \delta(T) = T,$$

qui sont des plongements et qui satisfont à la condition que $\gamma \circ \delta$ est le foncteur identique de la catégorie correspondente. Nous avons par suite, le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, shift left, "\gamma"] & & \mathcal{V} \arrow[ll, dashed, shift left, "\delta"] & \\
& \mathcal{A}_{c.e.} \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[rr, shift left, "\gamma"] & & \mathcal{V}_{c.e.} \arrow[ll, dashed, shift left, "\delta"] \arrow[ul, "\alpha"] \\
\mathcal{A}_c \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[rr, shift left, "\gamma"] & & \mathcal{V}_e \arrow[ll, dashed, shift left, "\delta"] \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

On peut constater que les géométries affines euclidienne et conforme euclidienne sont équivalentes à leurs modèles arithmétiques.

De la même manière, on peut définir les espaces pseudoeuclidiens et conformes pseudo-euclidiens du type hyperbolique normal, considérer leurs catégories et établir les rapports de ces catégories avec les catégories des espaces affines et des espaces vectoriels pseudoeuclidiens et conformes pseudo-euclidiens du type hyperbolique normal.

On peut encore considérer des autres géométries subordonnèes à la géométrie affine. Par exemple, la géométrie affine symplectique, la géométrie affine pseudo-euclidienne du type général, etc., établir leurs rapports avec les algèbres linéaires correspondantes et l'équivalence avec leurs modèles arithmétiques. Enfin, on peut considérer aussi les géométries centro-affines de chaque type analisé plus haut et établir leurs équivalence avec les algèbres linéaires correspondantes.

4. La géométrie projective.

Soit V un espace vectoriel et $V^* = V - [\vec{o}]$. En mettant $\vec{x} \sim \vec{y}$ si, et seulement si, il existe $k \in R^*$ tel que $\vec{y} = k\vec{x}$, on obtient une relation d'équivalence sur V^*. On appelle *espace projectif associé* à V l'ensemble $P(V) = V^*/\sim$. Si V et W sont deux espaces vectoriels, une transformation linéaire $T : V \longrightarrow W$ induit une transformation entre les ensembles V^* et W^* si, et seulement si, elle est injective. Dans ce cas, T détermine une application $P(T) : P(V) \longrightarrow P(W)$ donnée par

$$P(T)([\vec{x}]) = [T(\vec{x})],$$

où $[\vec{x}]$ est la classe d'équivalence de $\vec{x}$, nommée la *transformation projective induite par T*. Deux transformations linéaires T_1 et T_2 de V à W, déterminent la même transformation projective de $P(V)$ à $P(W)$ si, et seulement si, il existe $\rho \in R^*$ tel que $T_2 = \rho T_1$. On en obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des transformations linéaires injectives de V à W et l'ensemble facteur correspondante peut être identifiée avec l'ensemble des transformations projectives de $P(V)$ à $P(W)$. Si U, V, W sont trois espaces vectoriels et $T_1 : U \longrightarrow V$, $T_2 : V \longrightarrow W$ deux transformations linéaires injectives, alors $T_2 \circ T_1 : U \longrightarrow W$ est aussi une transformation injective et on a

$$P(T_2) \circ P(T_1) = P(T_2 \circ T_1).$$

Il en résulte que les espaces et les transformations projectives déterminent une catégorie $\mathcal{P}$, nommée la catégorie des espaces projectifs. Son étude est la *géométrie projective.* En associant à chaque espace vectoriel V l'espace projectif $P(V)$ et à chaque transformation linéaire injective $T : V \longrightarrow W$, la transformation projective induite $P(T) : P(V) \longrightarrow P(W)$ on obtient un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{V}^i$ des espaces vectoriels avec les transformations linéaires injectives comme morphismes, vers la catégorie $\mathcal{P}$ des espaces projectifs. Ce foncteur établit la liaison intime entre l'algèbre linéaire et la géométrie projective. Le foncteur du passage au dual dans V induit un foncteur du passage au dual en P, qui se trouve à la base du principe de dualité en géométrie projective. Il est aisé de définir le squelette arithmétique $\mathcal{P}_a$ de la catégorie $\mathcal{P}$ et de montrer que la géométrie projective est équivalente àvec son modèle arithmétique.

On appelle *espace projectif à hyperplan absolu* un espace projectif avec un hyperplan fixé, c'est-à-dire un couple $(P(V), P(V'))$ où V' est un sous espace vectoriel de V de codimension 1. Les espaces projectifs à hyperplan absolu avec les transformations projectives qui conservent l'hyperplan absolu constituent une catégorie $\mathcal{P}^0$. Evidemment cette catégorie est subordonnée à la catégorie $\mathcal{P}$.

Soit A_a^i le squelette arithmétique de la catégorie $\mathcal{A}^i$ des espaces affines avec les transformations affines injectives comme morphismes. En considérant sur les objets de $\mathcal{A}_a^i$ et $\mathcal{P}_a^0$ de repères naturels et en mettant

$$\varphi(R^n, R^n, \rho_0) = (P(R\times R^n), P(o\times R^n)), \varphi(a_\beta^\alpha, a_0^\alpha) = \begin{bmatrix} a_\beta^\alpha & a_0^\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta = 1, 2, ..., n,$$

on obtient un foncteur $\varphi : \mathcal{A}_a^i \longrightarrow \mathcal{P}_a^0$ qui est un isomorphisme. Par suite la catégorie $\mathcal{A}^i$ des espaces affines avec les transformations affines injectives comme morphismes est équivalente à la catégorie $\mathcal{P}^0$ des espaces projectifs à hyperplan absolu. Il en résulte que cette dernière est subordonnée à la géométrie affine et non pas équivalente à elle. De la même manière on peut montrer que la catégorie des espaces centro-affines avec les transformations affines injectives est équivalente à la catégorie des espaces projectifs à point et hyperplan absolus nonincidents.

On appelle *espace projectif à métrique elliptique* $P(V, [g])$ un cspace projectif associé à un espace vectoriel conforme euclidien $(V, [g])$. La métrique conforme de V détermine sur l'espace projectif une hyperquadrique imaginaire ou une corelation elliptique. Les espaces projectifs à métrique elliptique, avec les transformations projectives induites par les transformations conformes orthogonales, constituent la catégorie $\mathcal{P}_{m,e}$ des espaces projectifs à métrique elliptique. L'étude de cette catégorie est *la géométrie projective à métrique elliptique* (géométrie de Cayley elliptique).

Soit (V, g) un espace vectoriel euclidien et S la hypersphère unitaire de V. En mettant $\vec{y} \sim \vec{x}$ si, et seulement si, $\vec{y} = \pm\vec{x}$ on obtient une relation d'équivalence sur S et soit $S^* = S/\sim$. L'ensemble S^* avec la métrique g^* induite par g s'appelle *l'espace elliptique* associé à (V, g). Si (S_1^*, g_1^*) et (S_2^*, g_2^*) sont deux espaces elliptiques associés respectivement à (V_1, g_1) et (V_2, g_2), une transformation orthogonale $T : V_1 \longrightarrow V_2$ détermine une *isométrie elliptique* $T^* : S_1^* \longrightarrow S_2^*$ donnée par $T([\vec{x}]) = [T(\vec{x})]$. Les espaces et les isométries elliptiques constituent la catégorie Σ_e des espaces elliptiques et son étude est *la géométrie elliptique* (géométrie de Riemann). Soit (S_n^*, g_0^*) l'espace elliptique arithmétique de dimension n où g_0 est la métrique euclidienne canonique sur R^{n+1} et mettons $\psi(S_n^*, g_0^*) = (P(R^{n+1}), [g_0])$. Si $T^* : (S_n^*, g_0^*) \longrightarrow (S_m^*, g_0^*)$ est une isométrie elliptique et $T : (R^{n+1}, g_0) \longrightarrow (R^{m+1}, g_0)$ une transformation orthogonale qui induit T^*, alors mettons $\psi(T^*) = P(T) : (P(R^{n+1}), [g_0]) \longrightarrow P(R^{m+1}), [g_0])$. On obtient de cette manière un foncteur covariant $\psi : \Sigma_e^a \longrightarrow \mathcal{P}_{m,e}^a$ entre les squelettes arithmétiques des catégories Σ_e et $\mathcal{P}_{m.e}$ qui est un isomorphisme. Par suite, la géométrie elliptique est équivalente àvec la géométrie projective à métrique elliptique.

Un *espace projectif à métrique hyperbolique* est un espace projectif associé à un espace vectoriel conforme pseudo-euclidien du type hyperbolique normal. La métrique conforme euclidienne détermine une hyperquadrique réelle ou une corélation hyperbolique sur l'espace projectif. Les espaces projectifs à métrique hyperbolique et les transformations projectives induites par les transformations conformes pseudo-orthogonales, déterminent la catégorie $\mathcal{P}_{m,h}$ des espaces projectifs à métrique hyperbolique. L'étude de cette catégorie est *la géométrie projective à métrique hyperbolique* (géométrie de Cayley hyperbolique).

Soit (V, g) un espace vectoriel pseudo-euclidien du typc hyperbolique et S l'hypersphère donnée par $g(\vec{x}, \vec{x}) = -1$. On peut considérer la relation d'équivalence $\vec{y} \sim \vec{x}$ si, et seulement si, $\vec{y} = \pm\vec{x}$ et l'ensemble $S^* = S/\sim$. On appelle l'espace hyperbolique associé à (V, g), l'ensemble S^* avec la métrique g^* induite par g. Si (S_1^*, g_1^*) et (S_2^*, g_2^*) sont deux espaces hyperboliques associés à $(V_1.g_1)$ et (V_2, S_2), une transformation pseudo-orthogonale $T : V_1 \longrightarrow V_2$ détermine *une isométrie hyperbolique* $T^* : S_1^* \longrightarrow S_2^*$. Les espaces et les isométries hyperboliques constituent la catégorie

Σ_h des espaces hyperboliques et son étude est *la géométrie hyperbolique* (géométrie de Lobacewski-Bolyai). On peut constater que la géométrie hyperbolique est équivalente à la géométrie projective à métrique hyperbolique.

5. La géométrie conforme.

Soit $(V, [g])$ un espace vectoriel pseudo-euclidien du type hyperbolique normal et $(P(V), [g])$ l'espace projectif à métrique hyperbolique associé. L'ensemble des points de l'hyperquadrique absolue $Q \in P(V)$ s'appelle *l'espace conforme associé à* $(V, [g])$ *ou à* $(P(V), [g])$. Si Q et Q' sont deux espaces conformes associés respectivement à $(V, [g])$ et $(V', [g'])$, alors toute transformation conforme pseudo-orthogonale $T : (V, [g]) \longrightarrow (V', [g'])$ détermine une transformation $T^* : Q \longrightarrow Q'$ qui est la restriction à Q de la transformation projective induite $P(T) : (P(V), [g]) \longrightarrow (P(V'), [g'])$ et qui s'appelle *la transformation conforme induite par* T *ou par* $P(T)$.

Les espaces et les transformations conformes déterminent la catégorie des espaces conformes et l'étude de cette catégorie est la *géométrie conforme*. Evidement on peut considérer des foncteurs qui établissent la liaison de la géométrie conforme avec l'algèbre linéaire conforme pseudo-euclidienne et la géométrie projective à métrique hyperbolique.

6. Le rapport avec le point de vue de F. Klein.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie considerée plus haut et S l'un de ses objets. L'objet S avec les marphismes de S en S déterminent une sous-catégorie pleine, $\mathcal{C}_S$ de $\mathcal{C}$. Par géométrie de S nous entendons l'étude de la catégurie $\mathcal{C}_S$. En considérant la classe d'équivalence de S par rapport à la relation d'isomorphisme en $\mathcal{C}$ et les morphismes des objets de cette classe, on obtient une sous-catégorie $\mathcal{C}_{[S]}$ de $\mathcal{C}$. Il est aisé de voir que $\mathcal{C}_{[S]}$ est équivalente à $\mathcal{C}_S$ et par suite la géométrie de $\mathcal{C}_{[S]}$ est équivalente à la géométrie de $\mathcal{C}_S$. Soit G l'ensemble des morphismes bijectifs de S en S dans la categarie $\mathcal{C}$. G est alors le graupe d'automorphismes de S en $\mathcal{C}$ et en prenant S comme objet et G comme ensemble de morphismes, on obtient une sous-catégorie $[S, G]$ de $\mathcal{C}$ et même de $\mathcal{C}_S$. L'étude de la sous-catégorie $[S, G]$ est la géométrie de S d'après le point de vue de F. Klein. Cette géométrie est évidement subordonnée à la géométrie de S d'après le point de vue de la théorie des catégories.

La classe d'équivalence de S et les morphismes bijectifs correspondants forment une sous-catégorie $\mathcal{C}_{[S]}$ de $\mathcal{C}$ et même de $\mathcal{C}_{[S]}$ équivalente àvec la sous-catégorie $[S, G]$. Par suite, leurs géométries sont aussi équivalentes.

Soit S et S' deux objets isomorphes de $\mathcal{C}$ et $\sigma : S \longrightarrow S'$ un isomorphisme. Alors en mettant $F(S) = S'$ et $F(g) = \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}$, pour tout morphisme g de S en S, on obtient un foncteur $F : \mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{C}'_{S'}$ qui est un isomorphisme. Par suite, les géométries de S et S' dans le sens de la théorie des catégories sont isomorphes. Il est aisé de voir que la restriction de F à la sous-catégorie $[S, G]$ établit aussi un isomorphisme, dans le sens de F. Klein, entre les géométries de S et S' d'après F. Klein.

Enfin, supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ est subordannée à la catégorie $\mathcal{C}'$ et que F est le foncteur d'oubli carrespondent. Soit S un objet de $\mathcal{C}$ et $S' = F(S)$. Alors la restrictian de F à $\mathcal{C}$ est un foncteur d'oubli et par suite la géométrie de S dans le sens de la théorie des catégories est subordonnée à la géométrie de S'. Si G est G' sont les groupes d'automorphismes de S et S' respectivement en $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors $F(G)$ est un sous-groupe de G', isomorphe à G et par suite la géométrie de S est subordonnée à la géométrie de S' dans le sens de F. Klein.

1. Klein F., *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Vorschungen.* Erlangen, A. Deichert, 1872.
2. Rozenfeld B.A., *Neevclidovi gheometrii.* Moskva, Gostehizdat 1955.
3. Schubert H., *Catégories.* Springer, 1972.
4. Veblen O., Whitehead J.H.C., *The foundations of differential geometry*, Cambridge, University Press, 1932.