17 Sur les espaces G-affines

An. Univ. Timişoara,
ser. şt. mat., v. XVIII, f. 1, 1980, 25-36.

Dans ce travail nous considérons une généralisation naturelle et utile de la notion d'espace affine, qui s'obtient de la définition habituelle d'un tel espace par le remplacement de l'espace vectoriel associé avec un groupe quelconque. On constate à cette occasion, que beaucoup des propriétés d'un espace affine restent valables pour cette nouvelle structure, c'est-à-dire ces propriétés dépendent seulement de la structure de groupe de l'espace vectoriel associé. Il y a déjà des exemples importantes qui montrent l'utilité de la structure d'espace G-affine pour la mathématique actuelle.

Nous allons montrer (Prop. 3.12) que le groupe affine associé à un groupe G, défini comme le produit semidirect G. Aut G, avec la loi de composition $(g_1, t_1) \cdot (g_2, t_2) = (g_1 t_1(g_2), t_1 \circ t_2)$, [6], est précisement le groupe des automorphismes pour un espace affine associé à G. Puis, en considérant une suite exacte de groupes abéliens, nous allons voir que l'ensemble des scissions de cette suite est un espace affine associé à un certain groupe. Enfin, dans un récent travail [1], A. Albu et D. Opriş ont montré que l'ensemble des connexions continues sur une G-fibration principale est un espace affine associé à un groupe detérminé, en généralisant les résultats de [4].

1. Espaces G-affines

Définition 1.1. Soient A un ensemble non vide et G un groupe quelconque. Nous disons qu'une application $p : A \times A \longrightarrow G$ détermine sur A une structure *d'espace affine associé au groupe* G (ou *structure G-affine*) si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1) $\forall P, Q, R \in A : \; p(P,Q)p(Q,R) = p(P,R)$;

(2) Il existe $0 \in A$ tel que l'application, $h_0 : A \longrightarrow G$ définie par $h_0(P) = p(0,P)$ soit une bijection.

L'ensemble A doué de cette structure sera nomée *espace affine associé au groupe* G (ou *espace G-affine*) et noté par (A, p, G). Les éléments de A seront només *points*. Si en particulier, G est un module vectoriel, alors A est un module affine [3]. Pour G espace vectoriel, A est un espace affine habituel. Si G^0 est le groupe opposé à G et $j : G \longrightarrow G^0$ l'isomorphisme donné par $j(x) = x^{-1}$, alors l'application $p' = j \circ p$ détermine sur A une structure d'espace affine, associé à G^0 et nommé la structure affine *opposée* à la structure définie par G. En particulier, sur un groupe G on peut définir les suivantes quatre structures canoniques d'espace G ou G^0-affine:

$$p_1(x,y) = x^{-1}y,\ p_2(x,y) = xy^{-1},\ p_3(x,y) = y^{-1}x,\ p_4(x,y) = yx^{-1}. \tag{3}$$

Les premières deux sont associées à G et les dernières sont leurs opposées et par suite associées à G^0. Les structures p_1 et p_4 ont été considérées par E. Cartan [2]. Soit

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 0$$

une suite exacte des groupes abeliens.

Notons par S l'ensemble des scissions de cette suite, c'est-à-dire des homomorphismes $\chi : K \longrightarrow G$ qui satisfont la condition: $\psi \circ \chi = Id_K$.

Notons aussi par Σ l'ensemble des homomorphismes $\sigma : K \longrightarrow G$ qui possèdent la propriété $(\psi \circ \sigma)(x) = e_K$, $x \in K$. La loi de composition définie par $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(x) = \sigma_1(x)\sigma_2(x)$, $\forall x \in K$, détermine sur $\operatorname{Hom}(K;G)$ une structure de groupe pour lequel Σ est un sous-groupe.

L'application $p : S\times S \longrightarrow \Sigma$ donnée par $p(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2'$, où x_2' est l'élément symétrique à x_2 dans $\operatorname{Hom}(K;G)$, détermine sur S une structure d'espace affine associé à Σ.

De la définition 1.1 il résulte aisément

$$\forall P \in A:\ p(P,P) = e,\ \forall P, Q \in A:\ p(Q,P) = p(P,Q)^{-1}. \tag{4}$$

Nous avons aussi

Proposition 1.1. *Pour tout $P \in A$ et tout $x \in G$ il existe un point $Q \in A$ uniquement déterminé, tel que $p(P,Q) = x$.*

Il en résulte:

Conséquence 1.1. *Pour chaque $P \in A$, l'application $h_{P_0} : A \longrightarrow G$ donnée par $h_{P_0}(P) = p(P_0, P)$ est bijective. Par suite, la condition* (2) *est satisfaite pour tout $P_0 \in A$.*

Si (A, p, G) est un espace G-affine, alors en mettant

$$f(P,x) = Q \Longleftrightarrow p(P,Q) = x,\ \forall P \in A,\ x \in G, \tag{5}$$

on obtient une action à la droite, simplement transitive $f : A\times G \longrightarrow G$. Réciproquement, si $f : A\times G \longrightarrow G$ est une action simplement transitive, alors l'application $p : A\times A \longrightarrow G$, définie par (5) dtermine sur A une structure d'espace G-affine. On a, par suite

Proposition 1.2. *Etant donné un ensemble non vide A et un groupe G, il existe une bijection entre l'ensemble des structures G-affines sur A et l'ensemble des actions à la droite simplement transitives de G sur A.*

On appelle *segment orienté*, dans un espace G-affine, (A, p, G), un élément de $A\times A$. Nous dirons que deux segments orientés (P,Q) et (R,S) sont *équipollents* et notons $(P,Q) \sim (R,S)$ si on a $p(P,Q) = p(R,S)$. Par suite, la relation d'équipollence coïncide avec la relation d'équivalence définie par l'application p. Une classe de segments orientés équipollents sera nommée un *G-vecteur* de A. D'après (2) l'application p étant surjective, il résulte que l'application $p : A\times A/p \longrightarrow G$ qui associe à chaque G-vecteur de A, l'image de l'un des ses représentants par l'application p, est une bijection. Ceci nous permet alors de transporter à l'ensemble de G-vecteurs de A la structure de groupe de G et de regarder cet ensemble comme un groupe isomorphe à G.

Définition 1.2. Nous disons que l'espace G-affine (A, p, G) satisfait la propriété du parallélograme si

$$\forall P, Q, R.S \in A: \ (P, Q) \sim (R, S) \Longrightarrow (P, R) \sim (Q, S). \tag{6}$$

Proposition 1.3. *L'espace G-affine (A, p, G) satisfait la propriété du parallélograme si et seulement si G est commutatif.*

En effet, supposons G commutatif et soient $P, Q, R, S \in A$ tels que $p(P, Q) = p(R, S)$. De l'identité $p(P, Q)p(Q, S) = p(P, R)p(R, S)$ il résulte alors

$$p(P, R) = p(P, Q)p(Q, S)p(Q, P) = p(Q, S),$$

c'est-à-dire A satisfait la propriété du parallélograme.

Réciproquement, pour tous $x, y \in G$ et $P, Q, R, S \in A$, tels que $p(P, Q) = p(R, S) = x$ et $p(P, R) = y$ on a d'après (6) $p(P, R) = p(Q, S) = y$ et par suite

$$xy = p(P, Q)p(Q, S) = p(P, S) = p(P, R)p(R, S) = yx.$$

Définition 1.3. L'application $\tau : A \times A \times A \longrightarrow G$ donnée par

$$\forall P, Q, R, S \in A, \quad \tau(P : Q, R) = p(R, P)p(Q, P)p(P, R)p(P, Q) \tag{7}$$

est appelé la *torsion* de l'espace G-affine (A, p, G).

On voit que $\tau(P : A, R)$ est le comutateur des éléments $p(P, Q)$ et $p(P, R)$. On constate aussi que $\tau(P : Q, R) = p(S, T)$ où S et T sont les points de A tels que $p(Q, S) = p(P, R)$ et $p(R, T) = p(P, Q)$.

Nous disons que l'espace G-affine (A, p, G) est sans torsion si

$$\tau(P : Q, R) = e, \quad \forall P, Q, R, S \in A. \tag{8}$$

Des (7) et(8) il suit:

Proposition 1.4. *L'espace G-affine (A, p, G) est sans torsion si et seulement si le groupe G est commutatif.*

2. Sous-espaces G-affines

Définition 2.1. Soient (A, p, G) un espace G-affine et A' un sous ensemble de A. Nous disons que A' est un sous-espace G-affine de A s'il existe un point $P_0 \in A'$ tel que l'ensemble $G' = \{p(P_0, P) \mid P \in A'\}$ soit un sous-groupe'de G ou si $A' = \emptyset$.

On voit aisément que G' ne dépend pas de $P_0 \in A'$ et que la restriction de l'application p à $A' \times A'$ détermine sur A' une structure d'espace G'-affine. G' sera appelé le *sous-groupe directeur* de A'.

Un sous-espace de A sera appelé *abelien, central* ou *normal* si le sous-groupe directeur correspondent est respectivement abelien, central ou diviseur normal de G.

Proposition 2.1. *Donnés un point $P_0 \in A$ et un sous-groupe G' de G, il existe un sous-espace G-affine A' de A et un seul tel que $P_0 \in A'$ et G' est le sous-groupe direateur de A'.*

En effet, l'ensemble $A' = \{P \in A \mid p(P_0, P) \in G'\}$ est un sous-espace de A qui satisfait les conditions demandées. De proposition 1.1 il résulte que A' est unique.

Définition 2.2. Deux sous-espaces G-affines A' et A'' de A sont appelés *parallels* si leur sous-groupes directeur G' et G'' satisfont à la condition

$$G' \subset G'' \text{ ou } G'' \subset G'. \tag{9}$$

Il en résulte que deux sous espaces G-affines avec le même sous-espace directeur sont toujours parallels et que la proposition 2.1 représente une généralisation du postulat d'Euclid.

3. Transformations G-affines

Définition 3.1. Soient (A, P, G) et (B, q, H) deux espaces affines associés respectivement aux groupes G et H. Une application $T : A \longrightarrow B$ s'appelle *transformation affine* (homomorphisme) s'il exists un point $O \in A$ tel que l'application $t : G \longrightarrow H$ donnée par

$$\forall\, P \in A,\ \ t(p(O, P)) = q(T(O), T(P)) \tag{10}$$

soit un homomorphisme du groupe G en H. Si $H = G$, T sera appelée aussi *transformation G-affine.*

Dei (1), (4_2) et (10) on obtient

Proposition 3.1. *Si $T : A \longrightarrow B$ est une transformation affine et $t : G \longrightarrow H$ l'homomorphisme défini par* (10)*, alors*

$$\forall\, P, Q \in A,\ \ \ t(p(P, Q)) = q(T(P), T(Q)). \tag{11}$$

Il en résulte que l'application t donnée par (10) ne dépend pas du point O. On appelle t l'*homomorphisme induit* par la transformation affine T. On remarque que la transformation affine T est uniquement déterminée par un couple correspondents O et $T(O)$ et par l'homomorphisme induit t. En posant $h_0(P) = p(O, P)$ et $k_{o'}(P') = q(O', P')$ pour tous $P \in A$ et $P' \in B$, les applications $h_0 : A \longrightarrow G$ et $k_{O'} : B \longrightarrow H$ sont bijectives et la relation (11) peut s'écrire

$$t \circ h_0 = k_{T(O)} \circ T. \tag{12}$$

Il en résulte

Proposition 3.2. *Une transformation affine est injective, surjective ou bijective dans le même temp avec l'homomorphisme induit.*

On constate aisément que l'image d'un sous-espace G-affine de A par une transformation affine $T : A \longrightarrow B$ ainsi que l'image inverse d'un sous-espace affine de B sont aussi de sous-espaces affines. Si $(A_\alpha P_\alpha, G_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, sont des espaces G-affines, $T_1 : A_1 \longrightarrow A_2$, $T_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ des transformations affines et $t_1 : G_1 \longrightarrow G_2$, $t_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ les homomorphismes induits, alors en métant $T = T_2 \circ T_1$, $t = t_2 \circ t_1$ on a

$$t(p_1(O, P)) = p_3(T(O), T(P))$$

c'est-à-dire,

Proposition 3.3. *Le produit de deux transformations affines est aussi une transformation affine dont l'homomorphisme induit est le produit des homomorphismes induits par les transformations facteurs.*

De la même manière on obtient:

Proposition 3.4. *L'inverse d'une transformation affine bijective est aussi une transformation affine dont l'homomorphisme induit est l'inverse de l'homomorphisme induit par la transformation affine donnée.*

On en obtient en particulier

Proposition 3.5. *Le produit des transformations détermine sur l'ensemble des transformations G-affines bijectives (automorphismes) d'un espace G-affine une structure de groupe.*

Ce groupe serat appelé *le groupe des automorphismes de A* ou *le groupe affine de A* et noté par Aut$A$. De proposition 3.3 il résulte

Proposition 3.6. *L'application α : Aut $A \longrightarrow$ Aut G, donnée par $\alpha(T) = t$ est un épimorphisme.*

Définition 3.2. Soit (A, p, G) un espace G-affine. Une application $T : A \longrightarrow A$ s'appelle *G-translation* s'il existe $O \in A$ tel que

$$\forall P \in A: \ p(T(O), T(P)) = p(O, P). \tag{13}$$

Compte tenu de (11), il résulte qu'une G-translation est une transformation G-affine dont l'homomorphisme induit est l'application identique de G.

De proposition 3.6 on obtient

Proposition 3.7. *L'ensemble $\mathcal{H}$ des G-translations de l'espace G-affine A est un sous-groupe invariant du groupe Aut A.*

La relation (13) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$p(O, T(P)) = p(O, T(O)) \cdot p(O, P),$$

et en posant

$$p(O, T(O)) = g \tag{14}$$

on obtient

$$\forall P \in A, \ p(O, T(P)) = g \cdot p(O, P). \tag{15}$$

Proposition 3.8. *Une application $T : A \longrightarrow A$ est une G-translation si et seulement si il existe $O \in A$ et $g \in G$ tel que* (15) *soit satisfaite.*

Si G n'est pas commutatif l'élément $g \in G$ en (14) dépend du point $O \in A$ considéré. Si O est fixé et T_1, T_2 sont deux G-translations, on a de (13)

$$p(O, T_1 \circ T_2(O)) = p(O, T_1(O))p(O, T_2(O))$$

c'est-à-dire

Proposition 3.9. *Etant donné $O \in A$, l'application $\omega : \mathcal{H} \longrightarrow G$ définie par* (14) *est un isomorphisme entre le groupe $\mathcal{H}$ des G-translations de A et le groupe associé G.*

Définition 3.3. On appelle *transformation G-centro-affine* de centre O de l'espace G-affine A, une transformation G-affine qui conserve le point O.

Remarquons qu'une transformation G-affine T est une centro-affinité de centre O si et seulement si

$$\forall P \in A : p(O, T(P)) = t(p(O, P)). \tag{16}$$

Il en résulte que l'application β qui fait correspondre à chaque centro-affinité T de centre O, l'endomorphisme induit t, est une bijection entre l'ensemble des centro-affinités de centre O et l'ensemble des endomorphismes de G. En particulier, on a

Proposition 3.10. *L'ensemble des centro-affinités bijectives de centre O est un sous-groupe $\mathcal{K}$ de Aut A, isomorphe avec le groupe Aut G.*

On établit aisément

Proposition 3.11. *Etant donné $O \in A$, toute transformation G-affine de A peut s'exprimer d'une manière unique comme le produit d'une centro-affinité de centre O avec une translation.*

Pour $O \in A$ fixé, une transformation G-affine $T \in \operatorname{End} A$ peuve s'exprimer uniquement sous la forme

$$\forall P \in A :\in p(O, T(P)) = g \cdot t(p(O, P)) \tag{17}$$

où $g = p(O, T(O))$ et $t \in \operatorname{End} G$ est l'endomorphisme induit.

Réciproquement pour toute $(g, t) \in G \times \operatorname{End} G$, la transformation T définie par (17) appartient à End A. En posant donc

$$\forall T \in \operatorname{End} A;\ \gamma(T) = (g, t) \tag{18}$$

on obtient une application bijective $\gamma : \operatorname{End} A \longrightarrow G \times \operatorname{End} G$.

Pour $T_1, T_2 \in \operatorname{End} A$ on obtient de (17)

$$\forall P \in A,\ p(0, T_1 \circ T_2(O)) = g_1 t_1(g_2) \cdot t_1 \circ t_2(p(O, P))$$

c'est-à-dire,

$$\forall T_1, T_2 \in \operatorname{End} A:\ \gamma(T_1 \circ T_2) = (g_1 t_1(g_2), t_1 \circ t_2). \tag{19}$$

En particulier, on en obtient

Proposition 3.12. *Le groupe des automorphismes d'un espace G-affine A est isomorphic au produit semidirect du groupe associé G par le groupe des automorphismes de G, avec la loi de composition*

$$(g_1, t_1) \cdot (g_2, t_2) = (g_1 t_1(g_2), t_1 \circ t_2).$$

Parmi les automorphismes d'un espace G-affine A se trouvent ceux qui correspondent aux automorphismes intérieurs de G.

Leur ensemble est un sous-groupe invariant de $Aut\ A$ qui contient le groupe des translations et qui se réduit à ce dernier si G est commutatif. Un tel automorphisme est caractérisé par le fait qu'il existe $O \in A$ et $g, h \in G$ tel que

$$\forall P \in A;\ p(O, T(P)) = g \cdot p(O, P) \cdot h. \tag{20}$$

Pour élargir la classe des transformations entre les espaces G-affines, à côté des homomorphismes de groupes nous considérons aussi les antihomomorphismes, c'est-à-dire les applications $t : G \longrightarrow H$ qui satisfont la condition

$$\forall x, y \in G:\ t(x, y) = t(y) \cdot t(x).$$

Par exemple, pour tout groupe G, l'application $j_G : G \longrightarrow G$ donnée par $j_G(x) = x^{-1}$ est un antiautomorphisme involutif. Pour tout homomorphisme $t : G \longrightarrow H$, nous avons $t \circ j_G = j_H \circ t$, et l'application $t' = t \circ j_G$ est un antihomomorphisme.

Réciproquement, si $t' : G \longrightarrow H$ est un antihomomorphism, alors $t' \circ j_G = j_H \circ t'$, et $t = t' \circ j_G$ est un homomorphisme.

Les transformations affines données par la définition 3.1 seront appelées de première espèce. Nous donnerons

Définition 3.4. Une transformation affine de seconde espece de l'espace (A, p, G) dans l'espace (B, q, H) est une application $T : A \longrightarrow B$ avec la propriété que l'application $t : G \longrightarrow H$ donnée par (10) soit un antihomomorphisme.

Par exemple, en considérant l'espace G-affine (A, p, G), l'application $h_0 : A \longrightarrow G$ donnée par (2), et les structures G et G^0-affines canoniques (3) sur G, on a

$$\forall P \in A:\ p(h_0(O), h_0(P)) = \begin{cases} p_\alpha(O, P) & \text{pour } \alpha = 1, 4 \\ j_G \circ P_\alpha(O, P) & \text{pour } \alpha = 2, 3, \end{cases}$$

c'est-à-dire h_0 est un isomorphisme de (A, p, G) en (G, p_1, G) et (G, p_4, G^0) et un antiisomorphisme de (A, p, G) en (G, p_2, G) et (G, p_3, G^0).

Définition 3.5. On appelle *la symétrie* de l'espace G-affine A par rapport au point $0 \in A$, l'application $T : A \longrightarrow A$ donnée par

$$\forall P \in A:\ p(O, T(P)) = j_G \circ p(O, P).$$

Il en résulte qu'une symétrie est une transformation G-affine involutive de seconde espèce de A. On établit aisement:

Proposition 3.13. *Etant donné un point $0 \in A$, toute transformation. G-affine de seconde espèce de A s'exprime d'une manière unique comme le produit d'une transformation G-affine de première espèce avec la symétrie par rapport au point O.*

On peut constater que le produit des applications détermine sur l'ensemble des transformation G-affine bijectives de première et seconde espèce de (A, p, G) une structure de groupe qui est isomorphe au produit semi-direct du groupe G avec le groupe constitué par les automorphismes et les antiautomorphismes de G.

Enfin, remarquons qu'en prennant comme objets les espaces affines associés aux groupes et comme morphismes les tranformations affines on obtient une catégorie.

L'application qui fait correspondre à chaque espace affine le groupe associé et à chaque transformation affine l'homomorphisme induit est, d'après la proposition 3.3 un foncteur covariant de la catégorie des espaces G-affines à la catégbrie des groupes.

BIBLIOGRAPHIE

1. A.C. Albu şi D. Opriş, *Asupra mulţimii conexiunilor continue pe G-fibrări principale*, Simpoz. Naţional "Gh. Ţiţeica", Craiova 20-21 sept. 1979, pp. 103-108.
2. E. Cartan, *La géométrie des groupes de transformation*, J. Math. Pures et Appliquées, 6, 1927, 1-119.
3. V. Cruceanu, *Asupra modulelor afine*, Studii şi Cercet Mat., 21 (9) 1969, 1271-1278.
4. V. Cruceanu, *Sur l'ensemble des connexions sur un espace fibré*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R., 13(1) 1969, 27-34.
5. R. Miron, *Sur quelques structures affines*, Dem. Math, 6 (1) 1973, 289-294.
6. J.A. Wolf, *The Affine Group of a Lie Group*, Proc. A.M.S., 14, 1963, 352-353.