18 Le fibré des tenseurs de type $(1,1)$ sur une variété différentiable

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi,
t. XXVIII, s. I-a, 1982, f. 1, 47-54.

Parmi les fibrés associés d'une manière canonique à une variété différentiable, le fibré des tenseurs de type (1,1) présente un intéret particulier. A côté des propriétés géométriques généralles des fibrés vectoriels [1], [2] et tensoriels [5], le fibré des tenseurs de type (1,1) possède des propriétés speciales, remarquables, déterminèes par sa structure de fibré en algèbres associatives et par suite en algèbres de Lie, sur le champ R des réels.

Ce travail est le premier d'un cycle consacré à l'étude de ce fibré.

1. Introduction. Soient M une variété différentiable à n dimensions, de classe C^∞, E l'ensemble des tenseurs de type (1,1) sur M et $\pi : E \longrightarrow M$ la projection canonique. En associant à chaque carte locale (U, φ, R^n) sur M, les triplets $(\pi^{-1}(U), \Phi, R^n \times R^{n^2})$ et $(U, \psi, gl(n, R))$, où $\Phi(t_p) = ((x^i, y^i_j)$ avec $\varphi(p) = (x^i)$, $t_p = y^i_j \dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ et $\psi(t_p) = (p, y = \|y^i_j\|)$, on obtient une structure de variété différentiable de classe C^∞ sur E et une structure de fibré vectoriel (E, π, M) de classe C^∞ avec la fibré type $gl(n, R)$. En considérant l'application $\tau_p : gl(n, R) \longrightarrow E_p$ donnée par

$$\tau_p(y) = y^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \tag{1}$$

on en obtient pour $p \in M$ et $y', y'' \in gl(n, R)$,

$$\tau_p(y' \circ y'') = \tau_p(y') \circ \tau_p(y''),\ \ \tau_p([y', y'']) = [\tau_p(y'), \tau_p(y'')]. \tag{2}$$

Par suite, (E, π, M) est un fibré en algèbres associatives et en algèbres de Lie, localement trivial. L'ensemble $\Gamma(E)$ des sections C^∞ sur E est une algèbre associative et une algèbre de Lie sur l'anneau $\mathcal{F}(M)$ des fonctions réelles C^∞ sur M. Le triplet (K, π_1, M), où K est l'ensemble des tenseurs de type (1,1) nonsinguliers sur M et $\pi_1 = \pi_{|K}$, est un fibré en groupes de Lie, localement trivial, avec la fibré type $GL(n, R)$. (E, π, M) est le fibré en algèbres de Lie correspondant et K est une sous-variété ouverte de E.

Un changement de coordonèes locales sur E, induit par un changement sur M, est donné par

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i),\ \ y^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, y^i_j\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \tag{3}$$

La matrice jacobienne de ce changement est

$$(4) \qquad J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial x^h} & 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^h \partial x^p} \dfrac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} + \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^p} \dfrac{\partial^2 x^q}{\partial x^{\ell'} \partial x^{j'}} \dfrac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^h}\right) y_q^p & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^h} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \end{bmatrix}$$

Par suite, les coordonnèes d'un vecteur A et d'un covecteur α sur E, donnés par

$$(5) \qquad A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + A^i_j, \quad \frac{\partial}{\partial y^i_j} \alpha = \alpha_i dx^i + \alpha^i_j dy^i_j,$$

se transforment respectivement suivant les lois

$$(6) \qquad \begin{aligned} A^{i'} &= A^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \\ A^{i'}_{j'} &= A^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + A^i \left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{\ell'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\right) y^p_q, \\ \alpha_i &= \alpha^{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \alpha^{j'}_{i'} \left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{\ell'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{\ell'}}{\partial x^i}\right) y^p_q, \\ \alpha^j_i &= \alpha^{j'}_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \end{aligned}$$

2. Relèvement vertical (r.v.). A chaque fonction $f \in \mathcal{F}(M)$ nous associons la fonction $f^V = f \circ \pi$ sur E, qui s'appelle le *relèvement vertical* de f. On obtient une application $V : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(E)$ qui est un monomorphisme d'algbres sur R et par suite $\mathcal{F}(M)^V = V(\mathcal{F}(M))$ est une algèbre isomorphe à $\mathcal{F}(M)$. Plus généralement, soit $\mathcal{D}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs C^∞ de type (r, s) sur M et $\mathcal{D}^*(M)$ la sous-algèbre de l'algèbre tensorielle $\mathcal{D}(M)$, définie par $\mathcal{D}^*(M) = \sum_{r,s \geq 0} \mathcal{D}^r_{r+s}(M)$. En faisant correspondre à tout champ $T \in \mathcal{D}^r_{r+s}(M)$ le champ $T^V \in \mathcal{D}^r_s(E)$ donné localement par

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\left(T^{i_i \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r j_{r+1} \ldots j_{r+s}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_{r+s}}\right)^V = \\ &T^{i_i \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r j_{r+1} \ldots j_{r+s}} \circ \pi \frac{\partial}{\partial y^{i_1}_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}_{j_r}} \otimes dx^{j_{r+1}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_{r+s}}. \end{aligned}$$

et nommé le *relèvement vertical* de T, on obtient une application $V : \mathcal{D}^*(M) \longrightarrow \mathcal{D}(E)$ qui, avec l'application $V : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(E)$, constitue un dimorphisme d'algèbres.

En particulier, si ω est une 1-forme sur M, son r.v. est la 1-forme ω^V donnée par $\omega^V = \omega_i \circ \pi dx^i$. Si S est un champ de tenseurs de type (1,1) sur M son r.v. est le champ de vecteurs S^V sur E défini par

$$(8) \qquad S^V = S^i_j \circ \pi \frac{\partial}{\partial y^i_j} \cdot$$

On a en particulier,

$$(9) \qquad (dx^i)^V = dx^i, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right)^V = \frac{\partial}{\partial y^i_j} \cdot$$

Il est utile de considérer, pour $s = 1, 2, ...$, l'application $i : \mathcal{D}^1_{1+s}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0_s(E)$ définie par

$$i\left(T^i_{jj_1\ldots j_s}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\right) = y^j_i T^i_{jj_1\ldots j_s}\circ\pi dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}. \tag{10}$$

En particulier, pour $S \in \mathcal{D}^1_1(M)$, on obtient $iS \in \mathcal{F}(E)$ donné par

$$iS(t_p) = S^i_j(p)y^j_i,\ \forall\, t_p \in E. \tag{11}$$

On peut considérer aussi pour $S \in \mathcal{D}^1_1(M)$ l'application $i_S : \mathcal{D}^1_s(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0_s(E)$, donnée par

$$i_S\left(T^i_{jj_1\ldots j_s}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\right) = S^j_i T^i_{jj_1\ldots j_s}\circ\pi dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}. \tag{12}$$

Pour $T \in \mathcal{D}^1_1(M)$ on en obtient

$$i_S T = \mathrm{Tr}(S\circ T)\circ\pi. \tag{13}$$

Un champ de vecteurs A sur E s'appelle *champ vertical* s'il appartient à la distribution verticale i.e. $\pi'(A) = 0$. Par suite, un tel champ a l'expression locale

$$A(t_p) = A^i_j(x,y)\ \frac{\partial}{\partial y^i_j}\cdot \tag{14}$$

Il est aisé de voir q'on a la propriété caractéristique:

Proposition 2.1. *Un champ de vecteurs A sur E est vertical si et seulement si*

$$A(f^V) = 0,\quad \forall\, f \in \mathcal{F}(M). \tag{15}$$

En mettant pour chaque $\tau \in R$ et $t_p \in E$

$$h(\tau, t_p) = \exp\tau\cdot t_p \tag{16}$$

on obtient une action de classe C^∞, $h : R\times E \longrightarrow E$, du groupe additif R sur E, nommé le *groupe des homothéties* de E. Ce groupe engendre un champ de vecteurs vertical C sur E nommé le *champ canonique* et donné par

$$C(t_p) = y^i_j\ \frac{\partial}{\partial y^i_j}\cdot \tag{17}$$

En remarquant qu'un champ de vecteurs C^∞ sur E est uniquement déterminé par ses valeurs sur les fonctions de la forme iS, avec $S \in \mathcal{D}^1_1(M)$, on obtient pour C la caractérisation suivante.

Proposition 2.2. *Le champ de vecteurs C sur E est le champ canonique si et seulement si*

$$C(iS) = iS,\ \forall\, S \in \mathcal{D}^1_1(M). \tag{18}$$

Un autre exemple de champ de vecteurs verticaux est donné par les r.v. des champs de tenseurs de type (1,1) sur M.

On peut établir pour ces champs la caractérisation suivante:

Proposition 2.3. *Un champ de vecteurs A sur E est le r.v. d'un champ de tenseurs $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$, $A \in T^V$, si et seulement si*

$$(19) \qquad A(iS) = \mathrm{Tr}(S \circ T) \circ \pi, \ \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Une autre caractérisation pour les r.v. des champs de tenseurs (1,1) sur M est donnée par la

Proposition 2.4. *Un champ de vecteurs A sur E est le r.v. d'un champ de tenseurs* $(1,1)$ *sur M si et seulement si*

$$(20) \qquad L_C A = -A,$$

où L_C est la dérivée de Lie par rapport au champ canonique C sur E.

Soient maintenant A et B deux champs de vecteurs verticaux sur E, donnés dans une carte locale par

$$(21) \qquad A = A_j^i(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y_j^i}, \quad B = B_j^i(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y_j^i}.$$

En posant

$$(22) \qquad A \circ B = A_h^i B_j^h\,\frac{\partial}{\partial y_j^i},$$

il résulte de (6) et (21) que $A \circ B$ est aussi un champ de vecteurs vertical sur E. Il est facile de voir que l'application $(A,B) \longrightarrow A \circ B$ déterminé sur l'ensemble $V\mathcal{D}^1(E)$, des champs de vecteurs verticaux, une structure d'algèbre associative sur $\mathcal{F}(E)$. Par suite en mettant

$$(23) \qquad \{A,B\} = A \circ B - B \circ A,$$

on obtient sur $V\mathcal{D}^1(M)$ une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{F}(E)$. Pour $S, T \in \mathcal{D}_1^1(M)$ on a

$$(24) \qquad (S \circ T)^V = S^V \circ T^V, \quad [S,T]^V = \{S^V, T^V\}.$$

et par suite

Proposition 2.5. *Le relèvement vertical*

$$V : (\mathcal{F}(M), \mathcal{D}_1^1(M)) \longrightarrow (\mathcal{F}(E), V\mathcal{D}^1(E))$$

est un dimorphisme d'algèbres associatives et d'algèbres de Lie.

Vu que la distribution verticale sur E est intégrable, sur $V\mathcal{D}^1(E)$ on a une autre structure d'algèbre de Lie, induite par le crochet habituel pour deux champs de vecteurs sur E. Pour $f, g \in \mathcal{F}(M)$ et $A, B \in V\mathcal{D}^1(E)$ on a $f^V A + g^V B \in V\mathcal{D}^1(E)$ et $[f^V A, B] \in V\mathcal{D}^1(E)$, i.e. $V\mathcal{D}^1(E)$ est une algèbre Lie sur $\mathcal{F}(M)^V$. En posant, pour $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$

$$(25) \qquad \gamma(S) = \{C, S^V\},$$

on obtient une application $\gamma : \mathcal{D}_1^1(M) \longrightarrow V\mathcal{D}^1(E)$ pour laquelle on a

$$(26) \qquad \gamma([S,T]) = [\gamma(S), \gamma(T)], \ \forall S, T \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Il en résulte

Proposition 2.6. *Le couple d'applications*

$$(V, \gamma) : (\mathcal{F}(M), \mathcal{D}_1^1(M)) \longrightarrow (\mathcal{F}(E)^V, V\mathcal{D}^1(E))$$

est un dimorphisme d'algèbres de Lie.

Remarquons qu'en mettant pour tout $A \in V\mathcal{D}^1(E)$, $\mathrm{Tr}A(t_p) = A_i^i(t_p)$ on obtient une fonction C^∞ sur E.

Une 1-forme sur E qui est egale à zéro sur la distribution verticale s'appelle 1-*forme verticale.* Le r.v. d'une 1-forme sur M est un exemple de 1-forme verticale. Pour une telle 1-forme on peut établir

Proposition 2.7. *Une* 1*-forme α sur E est le r.v. d'une* 1*-forme sur M si et seulement si*

$$L_C \alpha = 0. \tag{27}$$

Foliation canonique. De la loi 2) il résulte qu'en mettant

$$f_k(t_p) = \mathrm{Tr}(t_p)^k, \; k = 1, 2, ..., n, \tag{28}$$

on obtient n fonctions de classe C^∞, $f_k : E \longrightarrow R$. Par suite, les équations

$$f_k = c_k, \; k = 1, 2, ..., n, \tag{29}$$

avec $c_k \in R$, définissent une foliation sur E nommée la *foliation canonique.* Les champs de tenseurs de type (1,1) sur M, qui appartiennent à cètte foliation ont lè spectre constant et jouent un rôle important dans la géométrie différentielle de M [3], [4], [6]. Les 1-formes différentielles exactes

$$\varphi_k = k^{-1} df_k, \; k = 1, 2, ..., n, \tag{30}$$

sont des 1-formes verticales sur E qui ont les expressions locales

$$\varphi_k(t_p) = (y^{k-1})_j^i dy_i^j, \; k = 1, 2, ..., n. \tag{31}$$

φ_k sera appellée la 1-*forme canonique* de degré $k-1$.

De (2) et (3) il résulte que les expressions

$$v_k(t_p) = (y^{k-1})_j^i \frac{\partial}{\partial y_j^i}, \; k = 1, 2, ..., n \tag{32}$$

définissent n champs de vecteurs verticaux sur E. v_k sera appelle le *champ de vecteurs canonique* de degré $k-1$. On a $v_2 = C$.

Le nombre des vecteurs (32), linéairement indépendents dans un point t_p de E, est égal au degré du polynôme minimal de t_p. On obtient pour v_k $(k = 1, 2, ..., n)$ la caractérisation suivante

$$v_k(iS)(t_p) = \mathrm{Tr}(t_p^{k-1} \circ S)(p)), \; \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M). \tag{33}$$

On remarque aussi, pour $h, k = 1, 2, ..., n$, les relations

$$\langle \varphi_h, v_k \rangle (t_p) = \mathrm{Tr}(t_p)^{h+k-1}, \; [v_h, v_k] = (k-h) v_{h+k-2}. \tag{34}$$

3. Relèvement complet (r.c.). En suivant A. Ledger et K. Yano [5], à toute dérivation D de l'algèbre tensorielle $\mathcal{D}(M)$ nous associons un champ de vecteurs D^c sur E défini par

$$D^c(iS) = iD(S), \ \forall S \in \mathcal{D}^1_1(M) \tag{35}$$

et nommé le *relèvement complet* de la dérivation D. Si dans une carte locale, $D = (D^i, D^i_j)$, alors pour le r.c. D^c on obtient dans la carte correspondante

$$D^c = (D^i, y^i_h D^h_j - D^i_h y^h_j). \tag{36}$$

De (35) il résulte

$$(D_1 + D_2)^c = D^c_1 + D^c_2, \ (aD)^c = aD^c, \ [D_1, D_2]^C = [D^c_1, D^c_2] \tag{37}$$

et par suite on a

Proposition 3.1. *Le r.c.* $c : \mathrm{Der}(\mathcal{D}(M)) \longrightarrow \mathcal{D}^1(E)$ *est un morphisme d'algèbres de Lie sur* R.

De (31) et (36) on obtient

Proposition 3.2. *Le r.c. d'une dérivation de* $\mathcal{D}(M)$ *est un champ de vecteurs tangents à la foliation canonique.*

On a aussi de (26) et (25):

Proposition 3.3. *Le r.c. d'une dérivation* D *de* $\mathcal{D}(M)$ *est un champ vertical si et seulement s'il est induit par un champ de tenseurs* T *de type* $(1,1)$ *sur* M*. Dans ce cas on a* $D^c = \gamma(T)$.

Remarquons les relations

$$D^c(f^V) = (D(f))^V, \ [D^c, C] = 0, \ [D^c, T^V] = (DT)^V, \ [D^c, \gamma(T)] = \gamma(DT) \tag{38}$$

pour $f \in \mathcal{F}(M)$, $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{D}(M))$ et $T \in \mathcal{D}^1_1(M)$.

On appelle relèvement complet d'un champ de vecteurs X sur M le r.c. de la dérivation de Lie définie par X,

$$X^c = (L_X)^c. \tag{39}$$

Si dans une carte locale $X = (X^i)$, alors

$$X^c = \left(X^i, \frac{\partial x^i}{\partial x^h} y^h_j - y^i_h \frac{\partial x^h}{\partial x^j} \right). \tag{40}$$

De (35) il résulte

Proposition 3.4. *Le champ de vecteurs* X^c *sur* E *est le r.c. du champ de vecteurs* X *sur* M *si et seulement si*

$$X^c(iS) = i(L_X S), \quad \forall S \in \mathcal{D}^1_1(M). \tag{41}$$

On en obtient

$$[X_1, X_2]^c = [X^c_1, X^c_2], \tag{42}$$

et par suite on a

Proposition 3.5. *Le r.c $c : \mathcal{D}^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^1(E)$ est un monomorphisme d'algèbres de Lie sur R.*

4. Relèvement horizontal (r.h.). Une connexion linéaire ∇ sur M détermine une loi de dérivation sur le fibré vectoriel (E, π, M) notée aussi par ∇ et définie par .

$$\nabla_X S = \nabla_X \circ S - S \circ \nabla_X. \tag{43}$$

Pour la courbure R^* de cette loi de dérivation on a

$$R^*_{XY} S = [R_{XY}, S] \;\; \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M), \;\; S \in \mathcal{D}^1_1(M). \tag{44}$$

Il en résulte que la loi de dérivation ∇ est sans courbure ($R^* = 0$), ou à parallélisme absolu des fibrés de (E, π, M) si et seulement s'il existe une 2-forme α sur M, telle que

$$R = \alpha \otimes I, \tag{45}$$

où I est le champ de tenseurs de Kronecker. Si la connexion ∇ est sans torsion ($T = 0$), alors la condition (45) équivaut, pour $n > 2$ à $R = 0$ et pour $n = 2$ à l'annulation du tenseur de Ricci de ∇, [7].

La relation (45) caractérise aussi le fait que la connexion ∇ sur M est avec parallélisme absolu des directions [7].

On appelle relèvement horizontal pour un champ de vecteurs X sur M, relatif, à la connexion ∇, le r.c. de la dérivation ∇_X,

$$X^H = (\nabla_X)^c. \tag{46}$$

De l'expression locale $\nabla_X = (X^i, \Gamma^i_{hj} X^h)$ et de (36), il résulte

$$X^H = (X^i, -G^i_{hj} X^h), \tag{47}$$

où

$$G^i_{hj} = \Gamma^i_{h\ell} y^\ell_j - y^i_\ell \Gamma^\ell_{hj}. \tag{48}$$

De (35) et (46) il résulte

Proposition 4.1. *Le champ de vecteurs X^H sur E est le r.h. d'un champ de vecteurs X sur M si et seulement si*

$$X^H(iS) = i(\nabla_X S), \quad \forall S \in \mathcal{D}^1_1(M). \tag{49}$$

Compte tenu de (41) on en obtient

$$X^H = X^c + \gamma({}^t\nabla X), \tag{50}$$

où ${}^t\nabla$ est la connexion transposée a ∇, i.e.

$${}^t\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y] \;\forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$$

Il en résulte

Proposition 4.2. *Le r.h. du champ de vecteurs X coïncide avec son r.c. si et seulement s'il exists $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ tel que*

$$ {}^t\nabla_Y X = \lambda Y,\ \forall Y \in \mathcal{D}^1(M) \tag{51}$$

i.e. X est concourant dans la connexion ${}^t\nabla$.

De (50) on a

$$[X,Y)^H = [X^H, Y^H] + \gamma(R_{XY}),\ \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M). \tag{52}$$

On en obtient

Proposition 4.3. *Le r.h. $H : \mathcal{D}^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^1(E)$, associé à la connexion ∇ sur M, est un monomorphisme d'algèbres de Lie sur R si et seulement si la loi de dérivation induite par ∇ sur E est sans courbure.*

Remarques aussi la relation

$$[X^c, Y^H) = [X^H, Y^H] + \gamma((L_X\nabla)(Y)),\ \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M). \tag{53}$$

Une 1-forme α sur E s'appelle 1-forme horizontale si on a

$$\alpha(X^H) = 0,\ \forall X \in \mathcal{D}^1(M). \tag{54}$$

De (47) et l'expression locale $\alpha = (\alpha_i, \alpha_i^j)$ on obtient pour une 1-forme horizontale,

$$\alpha_h = -G^i_{hj}\alpha^j_i, \tag{55}$$

et par suite

$$\alpha = \alpha^j_i \delta y^i_j, \tag{56}$$

où

$$\delta y^i_j = dy^i_j + G^i_{hj}dx^h. \tag{57}$$

A tout champ de tenseurs $T \in \mathcal{D}^1_1(M)$ on peut associer une 1-forme horizontale α_T sur E, définie par

$$\alpha_T(S^V) = \mathrm{Tr}(S \circ T) \circ \pi,\ \alpha_T(X^H) = 0\ \forall X \in \mathcal{D}^1(M),\ S \in \mathcal{D}^1_1(M), \tag{58}$$

et qui a l'expression locale

$$\alpha_T = T^j_i \delta y^i_j. \tag{59}$$

On a aussi la relation utile

$$\alpha_T(\gamma(S)) = \mathrm{Tr}(C \circ [S,T]^V). \tag{60}$$

Pour la différentielle extérieure de α_T on en obtient

$$d\alpha_T(S^V, U^V) = 0,\ 2d\alpha_T(S^V, X^H) = -\mathrm{Tr}(\nabla_X T \circ S)^V$$
$$2d\alpha_T(X^H, Y^H) = \mathrm{Tr}(C \circ [R_{XY}, T]^V)$$

et par suite

Proposition 4.4. *La 1-forme horizontale α_T, associèe au champ $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$ par les relations (58), est fermée si et seulement si le champ T est covariant constant.*

Dans ce cas α_T est même exacte et on a $\alpha_T = d(iT)$.

On appelle *relèvement horizontal* pour un champ de tenseurs $f \in \mathcal{D}_1^1(M)$, le champ de tenseurs $f^H \in \mathcal{D}_1^1(E)$ donné par

(61) $$f^H(S^V) = [f,S]^V,\ f^H(X^H) = [f(X)]^H,\ \forall X \in \mathcal{D}^1(M),\ S \in \mathcal{D}_1^1(M).$$

Compte tenu de (8) et (50), on en obtient

(62) $$f^H(X^c) = [(f(X)]^H - \{f^V, \gamma({}^t\nabla_X)\},\ \forall X \in \mathcal{D}_1^1(M)$$

Pour le champ de Kronecker I sur M on trouve comme r.h. le champ $h \in \mathcal{D}^1(E)$ donné par

(62) $$h(S^V) = 0,\ h(X^H) = X^H,\ \forall X \in \mathcal{D}^1(M),\ S \in \mathcal{D}^1(M),$$

i.e. le projecteur horizontal associé à la connexion ∇. En mettant alors $F = I - 2h$ on obtient la structure presque-produit associèe à la connexion ∇, pour laquelle on a

(63) $$F(S^V) = S^V,\ F(X^H) = -X^H.$$

Localement F a l'expression

(64) $$F = \begin{bmatrix} -\delta_h^i & 0 \\ 2G_{hj}^i & \delta_h^i\delta_j^k \end{bmatrix}.$$

Pour le tenseur de Nijenhuis de F, on a

(65) $$N_F(S^V, T^V) = 0,\ N_F(X^H, T^V) = 0,\ N_F(X^H, Y^H) = -4\gamma(R_{XY}).$$

Par suite il en résulte, compte tenu de (45)

Proposition 4.5. *La structure presque produit sur E, définie par la connexion ∇ sur M, est intégrable si et seulement si la loi de dérivation induite par ∇ sur le fibré (E, π, M) est sans courbure.*

A la connexion ∇ sur M on peut associer aussi le champ de tenseurs $\theta \in \mathcal{D}_2^0(E)$ défini par

(66) $$\theta(S^V, T^V) = \mathrm{Tr}(S \circ T)^V,\ \theta(S^V, X^H) = \theta(X^H, S^V) = \theta(X^H, Y^H) = 0.$$

Ce champ est symmétrique et de rang constant n^2. Il a l'expression locale

(67) $$\theta = \begin{bmatrix} G_{hq}^p G_{ip}^q & G_{ih}^k \\ G_{hi}^j & \delta_h^i \delta_i^k \end{bmatrix}$$

qui peut s'écrire encore, en mettant $\delta y = \|\delta y_j^i\|$

(68) $$\theta = \mathrm{Tr}(\delta y)^2.$$

De (66) il résulte que l'équation

$$\theta(A) = 0 \tag{69}$$

détermine une distribution sur E qui coïncide avec la distribution horizontale définie par la connexion ∇.

Si $T \in \mathcal{D}_1^1(M)$, alors pour la 1-forme horizontale $\alpha_T \in \mathcal{D}_1^0(E)$, définie par (58), on a aussi

$$\alpha_T = \theta(T^V). \tag{70}$$

Les champs F et θ sont liés par la relation

$$\theta(FA, B) = \theta(A, FB) = \theta(A, B), \quad \forall A, B \in \mathcal{D}^1(E). \tag{71}$$

Remarquons aussi les relations

$$L_C F = 0, \quad L_C \theta = 2\theta \tag{72}$$

où C est le champ de vecteurs canoniques.

On appelle *relèvement horizontal* d'une connexion ∇ sur M, la connexion ∇^H sur L donnée par

$$\nabla^H_{S^V} T^V = 0, \ \nabla^H_{S^V} X^H = 0, \ \nabla^H_{X^H} S^V = (\nabla_X S)^V, \ \nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H. \tag{73}$$

Pour la courbure $\widetilde{R}$ et la torsion $\widetilde{T}$ de ∇^H on a

$$\begin{gathered} \widetilde{R}_{S^V T^V} = 0, \ \widetilde{R}_{S^V X^H} = 0, \ \widetilde{R}_{X^H Y^H} = [R_{XY}]^H \\ \widetilde{T}(S^V, T^V) = 0, \ \widetilde{T}(S^V, X^H) = 0, \ \widetilde{T}(X^H, Y^H) = [T(X, Y)]^H - \gamma(R_{XY}). \end{gathered} \tag{74}$$

Par suite, on en obtient

Proposition 4.6. *Le r.h. ∇^H de la connexion ∇ est sans courbure si et seulement si ∇ est sans courbure.*

Proposition 4.7. *Le r.h. ∇^H de la connexion ∇ est sans torsion si et seulement si ∇ est sans torsion et la loi de dérivation induite par ∇ sur (E, π, M) est sans courbure.*

Par suite, ∇^H est plate en même temps que ∇. Remarquons enfin les relations:

$$\nabla^H F = 0, \ \nabla^H \theta = 0. \tag{75}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N., *Variétés différentielles et analytiques.* Hermann, 1967.
2. Duc, T.V., *Sur la géométrie différentielle des fibrés vecloriels.* Kodai Math. Sem. Rep. 26(1975) 349-408.
3. Jakubowicz, A., *On existence of a linear connection determined by a covariantly constant tensor fields of type* $(1, 1)$, Tensor N.S. 31 (1977) fasc. 3, 265-270.
4. Kobayashi, E.T., *A remark on the existence of a G-structure.* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1329-1331.
5. Ledger, A.J., Yano, *Almost complex structures on tensor boundles.* J. of Diff. Geometry 1 (1967), 355-368.
6. Lehman, J., Lejeune, J., *Intégrabilité des G-struclures définies par une* 1*-forme O-déformable à valeurs dans le fibré tangent.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16 (1966), fasc. 2, 329-387.
7. Norden, P.A., *Espaces à connection affine.* Moscva, 1960, 176-177.