19 Une structure parakählérienne sur le fibré tangent

Hommage au professeur A. Kawaguchi à l'occasion de son 80-e anniversaire.

Tensor, N.S.,
vol. 39 (1982), 81-84.

Les structures paracomplexes, parahermitiennes et parakählériennes ont été considérées par P. Rachewski [8], P. Libermann [6], M. Prvanović [7], A. Chirokov [9], K. Yano [11] et d'autres géométres qui ont mis en évidence leur grande analogie respectivement avec les structures complexes, hermitiennes et kähleriennes. Mais un problème important qui se pose est de donner des exemples non trivieux de variétés différentiables qui possèdent de telles structures.

Let but de ce travail est de montrer que le fibré tangent à toute variétés différentiable C^∞, paracompacte, possède une structure presque parakählerienne et que cette structure est parakählerienne si et seulement si la variété admet une métrique riemannienne sans courbure. A cette occasion nous établissons aussi une série de résultats, pour les structures presque paracomplexes, analogues à ceux de P. Dombrowski [3] pour les structures presque complexes, sur le fibré tangent.

1. Soient M une variétés différentiable de classe C^∞, $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles C^∞ sur M et $\mathcal{D}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs du type (r, s) et classe C^∞ sur M. On appelle structure presque produit sur M une structure définie par un champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}^1_1(M)$ qui satisfait à la condition $F^2 = I$. A une telle structure on peut associer deux distributions supplémentaires H et V sur M données par

$$H_p=\{X_p \in T_pM \mid F_p(X_p) = -X_p\},\ V_p=\{X_p \in T_pM \mid F_p(X_p)=X_p\},\ p\in M,$$

et nommées respectivement la distribution horizontale et la distribution verticale de F. La structure presque produit F s'appelle presque paracomplexe [6] si la dimension de M est paire et les valeurs propres ± 1 de F ont la même multiplicité. La structure F est intégrable, c'est-à-dire, les distributions H et V sont involutives, si et seulement si le tenseur de Nijenhuis de F, donné par

$$N(X,Y) = [X,Y] - F[FX,Y] - F[X,FY] + [FX,FY],\ X,Y \in \mathcal{D}^1(M),$$

est égal à zéro. Une structure presque paracomplexe intégrable est dite paracomplexe.

Une connexion linéaire ∇ sur M s'appelle connexion presque produit ou F-connexion si on a $\nabla_X F = 0$, $\forall\, X \in \mathcal{D}^1(M)$. L'ensemble de ces connexions est donnée par [1] $\nabla = \Psi(\overset{\circ}{\nabla}) + \Omega(\sigma)$, où $\overset{\circ}{\nabla}$ est une connexion quelconque fixé, $\sigma \in \mathcal{D}^1_2(M)$ et

$$\Psi(\nabla)_X = \frac{1}{2} F \circ \nabla_X F,\ \Omega(\sigma)_X = \frac{1}{2}(\sigma_X + F \circ \sigma_X \circ F),\ \forall\, X \in \mathcal{D}^1(M).$$

On déduit [10] que F est intégrable si et seulement s'il existe une F-connexion ∇ sans torsion.

Une structure presque métrique sur M est une structure définie par un champ de tenseurs $G \in \mathcal{D}_2^0(M)$ symétrique et non dégénéré. On appelle structure presque parahermitienne sur M une structure définie par un couple (F, G) où F est une structure presque produit et G une structure presque métrique, liées par la condition de compatibilité $G(FX, FY) = -G(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$.

Il en résulte que M a la dimension paire $2n$, F est une structure presque paracomplexe, G est une métrique pseudo-riemannienne de signature (n, n) et les distributions H et V sont isotropes pour la métrique G. En mettant dans ce cas $\Phi(X, Y) = G(X, FY)$, $\forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$, on a

$$\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X), \ \Phi(FX, FY) = -\Phi(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M),$$

c'est-à-dire, Φ détermine sur M une structure presque symplectique antiinvariante par F. Si ∇ est la connexion Levi-Civita de G, par un calcul analogue à celui fait dans ([5], p. 148), pour les structures presque hermitiennes, on obtient

$$2G((\nabla_X F)Y, Z) + 3d\Phi(X, Y, Z) + 3d\Phi(X, FY, FZ) + G(FX, N(Y, Z)) = 0.$$

Il en résulte

Théorème 1. *Pour une structure presque parahermitienne (F, G) les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *La connexion Levi-Civita de G est une F-connexion.*
2) *La structure presque produit F est intégrable et la 2-forme Φ est fermée.*

Une structure presque parahermitienne (F, G) s'appelle parahermitienne si la structure F est intégrable. Dans ce cas la connexion Levi-Civita de G est une F-connexion si et seulement si Φ est fermée. On appelle structure presque parakählhienne une structure presque parahermitienne (F, G) pour laquelle la 2-forme Φ associée est fermée. Dans ce cas la connexion Levi-Civita de G est une F-connexion si et seulement si F est intégrable.

Une structure presque parakählerienne (F, G) pour la quelle F est intégrable s'appelle structure parakählerienne. Ces dernières structures ont été introduites par P. Rachewski [8].

2. Soient M une variété n-dimensionelle paracompacte de classe C^∞ et π :TM$\longrightarrow M$ son fibré tangent. A une carte locale (U, φ) sur M, avec $\varphi(p) = (x^i)$, il corresponde sur TM une carte $(\pi^{-1}(U), \phi)$ avec $\phi(v_p) = (x^i, y^i)$, où $v_p = y^i \partial/\partial x^i$. Pour une fonction $f \in F(M)$ soit $f^V = f \circ \pi$ son relèvement vertical. En mettant pour un champ de tenseurs $T \in \mathcal{D}_{1+s}^r(M)$

$$\gamma(T_{jj_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}\, \partial/\partial x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial/\partial x^{i_r} \otimes dx^j \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}) =$$
$$= (y^j T_{jj_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}\, \partial/\partial x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial/\partial x^{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}),$$

on obtient un champ de tenseurs $\gamma(T) \in \mathcal{D}_s^r(TM)$. En particulier pour $\omega \in \mathcal{D}_1(M)$ et $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$ on a

$$\gamma(\omega_j dx^j) = y^j \omega_j, \ \gamma(S_j^i \partial/\partial x^i \otimes dx^j) = y^j S_j^i \partial/\partial y^i.$$

A un champ de vecteurs $X \in \mathcal{D}^1(M)$ on peut associer son relèvement vertical $X^V \in \mathcal{D}^1(TM)$, caractérise par $X^V(\gamma\omega) = \omega(X)^V$, $\forall \omega \in \mathcal{D}_1(M)$. Le relèvement horizontal X^H d'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{D}^1(M)$, par rapport à une connexion linéaire ∇, peut être caractérise par $X^H(\gamma\omega) = \gamma(\nabla_X \omega)$, $\forall \omega \in \mathcal{D}_1(M)$. A la connexion linéaire ∇ sur M on peut associer le champ $F \in \mathcal{D}_1^1(M)$ donné par

$$F(X^H) = -X^H, \ F(X^V) = X^V. \tag{1}$$

Comme la dimension de TM est $2n$, F est une structure presque produit, ([4], [12]) dont les distributions associées H et V sont les distributions horizontale de ∇ et verticale de TM et par suite de la même dimension n, il en résulte que F déterminé sur TM une structure presque paracomplexe. De l'expression du tenseur de Nijenhuis pour F,

$$N(X^H, Y^H) = -2\gamma R(X, Y),\ N(X^H, Y^V) = N(X^V.Y^V) = 0,\ \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M),$$

il résulte que la structure F est paracomplexe si et seulement si ∇ est sans courbure.

Soient maintenant g une métrique riemannienne sur M et ∇ une connexion linéaire quelconque. On appelle relèvement horizontal de g par rapport à ∇, [12], le champ de tenseurs $G \in \mathcal{D}^0_2(M)$ donnée par

$$\begin{gathered} G(X^H, Y^H) = 0,\ G(X^H, Y^V) = G(X^V, Y^H) = g(X, Y)^V, \\ G(X^V, Y^V) = 0,\ \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M). \end{gathered} \tag{2}$$

On constate que G est une métrique pseudo-riemannienne sur TM de signature (n, n) qui satisfait à la condition $G(FA, FB) = -G(A, B)$, $\forall A, B \in \mathcal{D}^1(TM)$.

Par suite on a

Théorème 2. *La structure presque produit F, associèe à une connexion ∇ par* (1) *et le relèvement horizontal G, par rapport à ∇, d'une métrique riemannienne g sur M, déterminent sur TM une structure presque parahermitienne (F, G). Cette structure est parahermitienne si et seulement si la connexion ∇ est sans courbure.*

Pour la 2-forme Φ associèe à la structure presque parahermitienne (F, G) sur TM on a

$$\begin{aligned} &3d\Phi(X^H, y^H, Z^H) = -\gamma(R(X, Y)g(Z) + R(Y, Z)g(X) + R(Z, X)g(Y)), \\ &3d\Phi(X^H, y^H, Z^V) = \tau(X, Y)Z,\ d\Phi(X^H, Y^V, Z^V) = 0,\ d\Phi(X^V, Y^V, Z^V) = 0, \end{aligned}$$

où $R(X, Y)g(Z)$ est la 1-forme α sur M donnée par $\alpha(U) = g(Z, R(X, Y)U)$, $\forall U \in \mathcal{D}^1(M)$, et

$$\tau(X, Y)Z = (\nabla_X g)(Y, Z) - (\nabla_Y g)(X, Z) + g(T(X, Y), Z)$$

est la co-torsion de la connexion centro-projective (g, ∇) sur M, [2].

Ensuite la structure Φ est symplectique, c'est-à-dire $d\phi = 0$, si et seulement si

$$\tau(X, Y)Z = 0,\ \gamma(R(X, Y)g(Z) + R(Y, Z)g(X) + R(Z, X)g(Y)) = 0. \tag{3}$$

Mais, comme la deuxième condition (3) est une conséquence de la première, [2], on a

Théorème 3. *La structure presque parahermitienne (F, G) sur TM, associèe à une connexion linéaire ∇ et une métrique riemannienne g sur M, par les relations* (1) *et* (2), *est presque parakählerienne si et seulement si la connexion centro-projective (g, ∇) sur M est sans co-torsion. Cette structure est parakählerienne si et seulement si la connexion centro-projective (g, ∇) est sans courbure et sans co-torsion.*

En considérant la 1-forme $\sigma \in \mathcal{D}_1(TM)$ définie par $\alpha = G(C)$, où C est le champ de vecteurs canonique sur TM, caractérise par $C(\gamma\omega) = \gamma\omega$, $\forall \omega \in \mathcal{D}_1(M)$, on a

$$\sigma(X^H) = \gamma(g(X)),\ \sigma(X^V) = 0,\ \forall X \in \mathcal{D}^1(M).$$

Pour la différentielle extérieure de σ on obtient

$$2d\sigma(X^H, Y^H) = \gamma(\tau(X, Y)),\ 2d\sigma(X^H, Y^V) = -g(X, Y)^V,\ d\sigma(X^V, Y^V) = 0,$$

et par suite $d\sigma \neq 0$. De l'expression de $d\sigma$ et Φ on déduit que $\Phi = -2d\sigma$ si et seulement si $\tau = 0$. C'est-à-dire, la 2-forme Φ est fermée seulement si elle est exacte et cela arrive quand la connexion centro-projective (g, ∇) est sans co-torsion.

Soit, en fin, ∇ la connexion Levi-Civita de g. Dans ce cas la connexion centro-projective (g, ∇) est sans co-torsion [2] et par suite on a

Théorème 4. *Si g est une métrique riemannienne sur M et ∇ la connexion Levi-Civita de g, alors la structure presque parahermitienne (F, G) sur TM, donnée par (1) et (2), est presque parakählerienne. Cette structure est parakählerienne si et seulement si la métrique g est sans courbure.*

REFERENCES

1. V. Cruceanu, *Connexions compatibles avec certaines structures sur un fibré vectoriel banachique*, Czechoslovak Math. J., 24 (1974), 126-142.
2. V. Cruceanu, *Structures et connexions classiques sur une variété différentiable*, An. Şt. Univ. "Al.I. Cuza" Iaşi, Ser. I.a, 22 (1976), 181-190.
3. P. Dombrowski, *On the geometry of the tangent bundle*, J. Reine und Angewandte Mathematik, 210 (1962), 837-843.
4. S. Ianuş şi C. Udrişte: *Asupra spaţiului fibrat tangent al unei varietăţi diferenţiabile*, Studii Cerc. Mat., 22 (1970), 599-611.
5. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, John Wiley and Sons, vol. 2, (1969).
6. P. Libermann, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, Annali di Mat. Pura ed Appl., IV, 36 (1954), 27-121.
7. M. Prvanović, *Holomorphically projective transformations in a locally product space*, Mathematica Balcanica, 1 (1971), 195-213.
8. R. Raszewskij, *Champs scalaires dans les espaces stratifiés*, Trudy sem. po vect. i tenz. analizu vyp., 6 (1948), 225-248.
9. A. Chirokov, *La géométrie des espaces biaxials généralisés.* Uc. Zap. K.G. Ou., 114 (1954), 123-166.
10. A. Walker, *Almost-product structures*, Proc. Symp. Pure Math., 3 (1961), 94-100.
11. K. Yano, *Differential geometry of complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, N.Y., (1965).
12. K. Yano and S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles*, Marcel Dekker, Inc. N.Y., (1973).