20 Structures remarquables sur le fibré des tenseurs de type $(1,1)$

Mathematica, Cluj-Napoca,
t 25 (48), no. 1, 1983, pp. 21-28.

En continuant l'étude du fibré des tenseurs de type (1,1) sur une variété différentiable commencé dans [1], nous nous proposons dans ce travail de chercher quelques structures remarquables sur ce fibré, obtenues par le relèvement des certaines structures sur la variété base.

1. Introduction. Soient M une variété différentiable C^∞ et (R, π, M) le fibré des tenseurs de type (1,1) sur M. Notons par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur M et par $\mathcal{D}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs de type (r,s) et classe C^∞ sur M. A une carte locale $(U, \varphi, \boldsymbol{R}^n)$ sur M avec $\varphi(p) = (x^i)$, $p \in U$, nous associons la carte $(\pi^{-1}(U), \Phi, \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n^2})$ sur E avec $\Phi(t_p) = (x^i, y^i_j)$, où $t_p = y^i_j \dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \in \pi^{-1}(U)$. Pour une fonction $f \in \mathcal{F}(M)$, notons par f^v la fonction C^∞ sur E définie par $f^v = f \circ \pi$ et appellée le relèvement vertical (r v.) de f. Pour un champ de tenseurs $S \in \mathcal{D}^1_1(M)$ notons par iS la fonction C^∞ sur E, définie localement par

$$iS(t_p) = S^i_j(p) y^j_i, \quad \forall\, t_p \in E. \tag{1}$$

Les fonctions de cette forme jouent un rôle important dans l'étude du fibré (E, π, M) parce que tout champ de vecteurs sur la variété E est uniquement déterminé par ses valeurs sur l'ensemble de ces fonctions. Nous appellons relèvement vertical d'un champ de tenseurs $T \in \mathcal{D}^1_2(M)$, le champ de vecteurs $T^v \in \mathcal{D}^1(E)$ défini par

$$T^v(iS) = Tr\,(S \circ T) \circ \pi, \quad \forall\, S \in \mathcal{D}^1_1(M) \tag{2}$$

Il est utile de considérer l'application $\gamma : \mathcal{D}^1_1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^1(E)$ définie par

$$\gamma(T)(iS) = i([T,S]) \circ \pi, \quad \forall\, S \in \mathcal{D}^1_1(M). \tag{3}$$

Une connexion linéaire ∇ sur M détermine une loi de dérivation sur le fibré vectoriel (E, π, M), noté aussi par ∇, en mettant pour tout $S \in \mathcal{D}^1_1(M)$,

$$\nabla_X S(Y) = \nabla_X(S(Y)) - S(\nabla_X Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M) \tag{4}$$

On appelle relèvement horizontal (r.h.) d'un champ de vecteurs X sur M, par rapport à la connexion ∇, le champ de vecteurs X^H sur E défini par

$$X^H(iS) = i(\nabla_X S), \quad \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M) \tag{5}$$

On constate que tout champ de tenseurs sur la variété E est uniquement determiné par ses valeurs sur les champs de vecteurs de la forme S^v et X^H avec $S \in \mathcal{D}_1^1(M)$ et $X \in \mathcal{D}^1(M)$. En particulier, pour la connexion ∇ on peut considérer le champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}_1^1(E)$ donné par

$$F(S^v) = S^v, \quad F(X^H) = -X^H, \tag{6}$$

qui détermine la structure presque-produit (p.p) sur E, associé à la connexion ∇ sur M. Cette structure est intégrable [1] si et seulement si

$$\gamma(R_{XY}) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M) \tag{7}$$

où R est le tenseur de courbure de ∇. Il en résulte

$$R = \alpha \otimes I, \tag{7'}$$

où α est une 2-forme sur M et I est le champ de Kronecker sur M. La condition (7) exprime le fait que la loi de dérivation induite par ∇ sur (E, π, M) est sans courbure i.e. à parallélisme absolu des fibrés. On appelle relèvement horizontal d'une connexion ∇ sur M, la connexion linéaire ∇^H sur la variété E définie par

$$\nabla^H_{S^v} T^v = 0, \ \nabla^H_{S^v} X^H = 0, \ \nabla^H_{X^H} S^v = (\nabla_X S)^v, \ \nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H. \tag{8}$$

La connexion ∇^H est sans courbure dans le même temps avec ∇. Elle est sans torsion si et seulement si ∇ est sans torsion et satisfait (7). Par suite ∇^H est plate dans le même temps avec ∇.

2. Structures sur le fibré (E, π, M). Nous appelons *g-structure* sur M, une structure définie par un champ de tenseurs g de type $(0,2)$ nonsingulier sur M. Une g-structure s'appelle *presque-métrique* (p.m.) ou *presque-symplectique* (p.s) lorsque le champ g est symétrique ($g = {}^t g$) ou respectivement antisymétrique ($g = -{}^t g$). A une g-structure g sur M on peut associer une applicatiou $\mathcal{F}(M)$-bilinéaire $\bar{g} : \mathcal{D}_1^1(M) \times \mathcal{D}_1^1(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ donnée par

$$\bar{g}(S, T) = Tr\,[({}^t g^{-1} \circ {}^t S \circ g) \circ T], \quad \forall S, T \in \mathcal{D}_1^1(M) \tag{9}$$

ou localement

$$\bar{g}(S, T) = g_{ij} S^i_k g^{hk} T^j_k \tag{9'}$$

$\bar{g}$ peut être considerée aussi comme une application $\boldsymbol{R}$-bilinéaire de la somme de Whitney $E \otimes E$ en $\boldsymbol{R}$ et par suite comme une g-structure sur le fibré vectoriel (E, π, M).

On obtient de (9)

Proposition 2.1. *La structure g sur (E, π, M) est p.m. si et seulement si la structure g sur M est p.m. ou p.s.*

En considérant une connexion ∇ sur M on obtient des (9) et (4).

Proposition 2.2. *La structure $\bar{g}$ est invariante dans le transport parallele induit par ∇ sur le fibré (E, π, M) i.e. $\nabla \bar{g} = 0$, si et seulement s'il existe une 1-forme β sur M telle que*

$$\nabla g = \beta \otimes g \tag{10}$$

En particulier, si g est une structure riemannienne sur M alors $\bar{g}$ est une structure riemannienne sur le fibré (E, π, M), invariante dans le transport parallèle induit par la connexion de Levi-Civita de g.

A une g-structure sur M on peut associer aussi une application $\mathcal{F}(M)$-linéaire $P_g : \mathcal{D}_1^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}_1^1(M)$ défini par

$$P_g(S) = g^{-1} \circ {}^t S \circ g, \ \forall S \in \mathcal{D}_1^1(M). \tag{11}$$

ou localement

$$[P_g(S)]_j^i = g^{ih} S_h^k g_{kj} \tag{11'}$$

P_g peut être aussi considéré comme un automorphisme du fibré vectoriel (E, π, M). De (11) on obtient

$$P_g(S \circ T) = P_g(T) \circ P_g(S), \ P_g([S, T]) = [P_g(T), P_g(S)] \tag{12}$$

et par suite on a

Proposition 2.3. *L'application P_g déterminé sur $\mathcal{D}_1^1(M)$ (resp. (E, π, M)) un antiautomorphisme pour la structure d'algèbre associative (resp. de fibré en algèbres associatives) et par suite d'algèbre de Lie (resp. de fibré en algèbres de Lie).*

En considérant une connexion ∇ sur M on obtient des (4) et (11).

Proposition 2.4. *Le transport par parallélisme, induit par ∇ sur (E, π, M), est invariant par l'application P_g si et seulement si g satisfait la condition* (10).

On a aussi de (11)

Proposition 2.5. *L'application P_g est une structure p.p. sur (E, π, M) si et seulement si g est une structure p.m. ou p.s. sur M, i.e. $g = \varepsilon {}^t g$, oú $\varepsilon = \pm 1$.*

Dans ce cas, les projecteurs associés à la structure p.p. P_g sont donnés par

$$O_g = \frac{1}{2}(I \otimes I + \varepsilon P_g), \quad O_g^* = \frac{1}{2}(I \otimes I - \varepsilon P_g) \tag{13}$$

Nous appelons *f-structure* sur M, une structure définie par un champ de tenseurs f de type (1,1) nonsingulière sur M. A une telle structure on peut associer une application $\mathcal{F}(M)$-linéaire $\bar{f} : \mathcal{D}_1^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}_1^1(M)$ définie par

$$\bar{f}(S) = f \circ S, \quad \forall\, S \in \mathcal{D}_1^1(M). \tag{14}$$

Le champ f détermine aussi un automorphisme du fibré (E, π, M) qui peut être considéré comme une $\bar{f}$-structure sur ce fibré. Des (4) et (14) il résulte

Proposition 2.6. *Le transport par parallélisme sur le fibré (E, π, M), induit par la connexion ∇ sur M, est invariant par l'automorphisme $\bar{f}$ si et seulement si f est covariant constant* $(\nabla f = 0)$.

Il est interessant de voire dans quel cas la structure $\bar{f}$ est presque produit (p.p) ou presque-complexe (p.c.) sur (E, π, M). Le reponse à cette question est donné par

Proposition 2.7. *L'automorphisme $\bar{f}$ est une structure p.p. (resp. p.c.) sur M si et seulement si f est une structure p.p. (resp. p.c.) sur M.*

Dans ce cas la loi de dérivation sur (E, π, M), induite par une connexion ∇ sur M, est p.p. (resp. p.c.) i.e. $\nabla \bar{f} = 0$, si et seulement si ∇ est p.p. (resp. p.c.) i.e. $\nabla f = 0$.

Considérons sur M un couple (g, f) formé par une g et une f-structure. On a alors

$$\bar{g}(\bar{f}(S), \bar{f}(T)) = \bar{g}(S, T), \quad \forall\, S, T \in \mathcal{D}_1^1(M)$$

si et seulement si

$$g(f(X), f(Y)) = g(X, Y) \forall\, X, Y \in \mathcal{D}^1(M).$$

Par suite

Proposition 2.8. *Le couple $(\bar{g}, \bar{f})$ est presque-hermitien (p.h.) sur (E, π, M) si et seulement si le couple (g, f) est p.h. sur M.*

Dans ce cas, en considérant les structures p.s. φ et $\overline{\varphi}$, associées respectivement aux couples (g, f) et $(\bar{g}, \bar{f})$ et donnèes par

$$\varphi(X, Y) = g(X, f(Y)), \quad \overline{\varphi}(S, T) = g(S, \bar{f}(T)), \tag{15}$$

on a

Proposition 2.9. *La loi de dérivation sur (E, π, M), induite par une connexion ∇ sur M, est p.s. relativement à la structure p.s. $\overline{\varphi}$ i.e. $\nabla \overline{\varphi} = 0$, si et seulement si ∇ est conforme presque métrique (c.p.m.) et conforme presque symplectique (c.p.s.) sur M, avec la même 1-forme β,*

$$\nabla g = \beta \otimes g, \quad \nabla \varphi = \beta \otimes \varphi. \tag{16}$$

Dans ce cas, on a aussi $\nabla f = 0$, et par suite $\nabla \bar{g} = 0$, $\nabla \bar{f} = 0$, i.e. la loi de dérivation induite par ∇ sur (E, π, M), est aussi p.m. et p.c.

En mettant pour une f-structure sur M,

$$P_f(S) = f^{-1} \circ S \circ f \ , \quad \forall\, S \in \mathcal{D}^1_1(M) \tag{17}$$

on obtient une application $\mathcal{F}(M)$-linéaire $P_f : \mathcal{D}^1_1(M) \longrightarrow \mathcal{D}^1_1(M)$ qui détermine un automorphisme du fibré (E, π, M), noté aussi par P_f. On a

$$P_f(S \circ T) = P_f(S) \circ P_f(T), \ P_f([S,T]) = [P_f(S), P_f(T)]. \tag{18}$$

Par suite on a

Proposition 2.10. *L'application P_f détermine sur $\mathcal{D}^1_1(M)$ (resp. sur le fibré (E, π, M)) un automorphisme pour la structure d'algèbre associative (resp. de fibré en algèbres associatives) et par suite d'algèbre de Lie (resp. de fibré en algèbres de Lie).*

En considérant une connexion ∇ sur M on a de (17)

Proposition 2.11. *Le transport par parallélisme, induit par ∇ sur (E, π, M), est invariant par l'automorphisme P_f si et seulement si f est covariant constant.*

On a aussi de (17)

Proposition 2.12. *L'application P_f détermine une structure p.p. sur (E, π, M) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ tel que $f^2 = \lambda I$.*

En particulier, cette condition est satisfaite si $f^2 = \varepsilon I$ où $\varepsilon = \pm 1$ i.e. si f est une structure p.p. ou p.c. sur M. Dans ce cas les projecteurs associés à la structure p.p. P_f sont:

$$\Omega_f = \frac{1}{2}\,(I \otimes I + \varepsilon P_f), \ \Omega^*_f = \frac{1}{2}\,(I \otimes I - \varepsilon P_f). \tag{19}$$

Si (g, f) est un couple p.h. sur M et φ est la structure p.s. associée, alors on obtient sur le fibré (E, π, M) trois structures p.p. P_g, P_f et P_φ, qui sont liées par la relation

$$P_\varphi = P_f \circ P_g. \tag{20}$$

Dans le cas particulier d'une structure kählerienne (g, f, φ) sur M, les automorphismes involutives P_g, P_f P_φ conservent le transport par parallélisme sur (E, π, M) induit par la connexion de Levi-Civita de g.

3. Structures sur la variété E. Soient g un champ de tenseurs de type $(0,2)$ nonsingulière et ∇ une connexion linéaire sur M. Nous appelons *relèvement diagonal* (r.d.) du champ g, par rapport à la connexion ∇, le champ de tenseurs D de type (0,2) sur la variété E définie par

$$D(S^v, T^v) = \bar{g}(S,T) \circ \pi, \ D(S^v, X^H) = D(X^H, S^v) = 0, \ D(X^H, Y^H) = g(X,Y) \circ \pi. \tag{21}$$

En tenant compte de (4) et (8) on en obtient:

Proposition 3.1. *Le r.d. D du champ de tenseurs g est covariant constant par rapport au r.h. ∇^H de la connexion ∇ si et seulement si g est covariant constant par rapport à la connexion ∇ sur M.*

On voit aussi que le r.d. D est une métrique de Riemann sur E si et seulement si g est une métrique de Riemann sur M. Dans ce cas le r.h. de la connexion de Levi-Civita de g est une connexion métrique pour D. Cette connexion coïncide avec la connexion de Levi-Civita de D si et seulement si elle est sans torsion i.e. la connexion Levi-Civita de g est sans courbure.

Nous appelons r.d. d'un champ de tenseurs f de type (1, 1), nonsingulier, par rapport à la connexion ∇, sur M, le champ de tenseurs J de type $(1,1)$ sur E, défini par

$$J(S^v) = [\bar{f}(S)]^v, \;\; J(X^H) = [f(X)]^H. \tag{22}$$

Compte tenu de (4) et (8), il en résulte

Proposition 3.2. *Le r.d. J du champ de tenseurs f est covariant constant par rapport au r.h. ∇^H de la connexion ∇ si et seulement si f est covariant constant par rapport à la connexion ∇ sur M.*

Pour un couple (g, f) sur M on obtien un couple (D, J) sur E et dès (21) et (22) on obtient

Proposition 3.3. *Le r.d. (D, J) du couple (g, f) est une structure p.h. sur E si et seulement si (g, f) est p.h. sur M.*

Dans ce cas, en mettant

$$\Phi(A, B) = D(A, JB), \;\; \forall A, B \in \mathcal{D}^1(E) \tag{23}$$

on déduit que Φ est une structure p.s. sur E avec l'expression

$$\begin{aligned} \Phi(S^v, T^v) &= \overline{\varphi}(S, T) \circ \pi, \\ \Phi(S^v, X^H) &= \Phi(X^H, S^v) = 0, \\ \Phi(X^H, Y^H) &= \varphi(X, Y) \circ \pi. \end{aligned} \tag{24}$$

On en obtient:

Proposition 3.4. *Le r.h. ∇^H de la connexion ∇ sur M est p.s. pour Φ si et seulement si ∇ est p.m. pour g et p.c. pour f.*

Dans ce cas on voit aussi que ∇^H est p.m. pour D et p. c. pour J. On a encore dans cet cas, pour le tenseur de Nijenhuis de J:

$$\begin{aligned} &N_J(S^v, T^v) = 0, \\ &N_J(X^H, S^v) = [(f \circ \nabla_X f - \nabla_{f(X)} f) \circ S]^v \\ &N_J(X^H, Y^H) = N_f(X, Y)^H + \gamma(R_{XY} - R_{f(X)f(Y)}) + f^v \circ \gamma(R_{f(X)Y} + R_{Xf(Y)}) \end{aligned}$$

Pour la différentielle extérieure de Φ on a aussi:

$$\begin{aligned} &d\Phi(S^v, T^v, U^v) = 0, \\ &d\Phi(S^v, T^v, X^H) = \frac{1}{2} [(\nabla_X \overline{\varphi})(S, T)] \circ \pi \\ &d\Phi(S^v, X^H, Y^H) = \frac{1}{3} \Phi(S^v, \gamma(R_{XY})), d\Phi(X^H, Y^H, Z^H) = d\varphi(X, Y, Z) \circ \pi \end{aligned}$$

En prennant ∇ la connexion Levi-Civita de g, on en obtient:

Proposition 3.5. *Le r.d. (D, J) du couple (g, f) par rapport à la connexion Levi-Civita de g déterminé sur E une structure kählerienne si et seulement si (g, f) détermine sur M une structure kählerienne et $R = 0$.*

Soient g une structure p.m. ou p.s. ($g = \varepsilon^t g$) et ∇ une connexion sur M. En posant

$$F_g(S^v) = \varepsilon P_g(S)^v, \; F_g(X^H) = 0 \tag{25}$$

on obtient un champ de tenseure de type (1,1) sur E qui satisfait à la condition $F_g^3 = F_g$. Par suite F_g est une structure presque co-produit (p.c.p.) sur E, [2]. A une telle structure on associe trois projeteurs P_1, P_2, P_3 donnée par

$$P_1 = I - F_g, \; P_2 = \frac{1}{2}(F_g + F_g^2), \; P_3 = \frac{1}{2}(-F_g + F_g^2).$$

De (25) et (13) il résulte

$$\begin{aligned} &P_1 = h, \; P_2(S^v) = O_g(S^v), \; P_2(X^H) = 0, \\ &P_3(S^v) = O_g^*(S)^v, \; P_3(X^H) = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

oú h est le projecteur horizontal de la structure p.p. F, associé à ∇ et O_g, O_g^* sont le projecteurs associés à la structure p.p. P_g sur le fibré (E, π, M).

Pour le tenseur de Nijenhuis de F_g on a

$$\begin{aligned} &N_{F_g}(S^v, T^v) = 0, \\ &N_{F_g}(X^H, S^v) = [\nabla_X S - (P_g(\nabla_X(P_g(S))]^v \\ &N_{F_g}(X^H, Y^H) = -\gamma(R_{XY}) \end{aligned} \tag{27}$$

Il en résulte

Proposition 3.6. *La structure p.c.p. F_g sur E associèe à une structure p.m. ou p.s.g, sur M à l'aide d'une connexion linéaire ∇ sur M, est integrable si et seulement si*

$$\nabla g = \beta \otimes g, \quad R = \alpha \otimes I. \tag{28}$$

où β est une 1-forme et α une 2-forme sur M.

En particulier si g est une structure riemannienne sur M et ∇ la connexion de Levi-Civita correspondente alors F_g est intégrable si et seulement si $R = 0$.

Soient f une structure p.p. ou p.c. ($f^2 = \varepsilon I$) et ∇ une connexion linéaire sur M. En mettant

$$F_f(S^v) = \varepsilon P_f(S^v), \quad F_f(X^H) = 0 \tag{29}$$

on obtient une structure p.c.p. sur E. Les projecteurs suplémentaires Q_1, Q_2, Q_3 de F_f sont donnés par

$$\begin{aligned} &Q_1 = h, \; Q_2(S^v) = \Omega_f(S)^v, \; Q_2(X^H) = 0, \\ &Q_3(S^v) = \Omega_f^*(S)^v, \; Q_3(X^H) = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

où h est le projecteur horizontal de la structure p.p. F, associé à ∇ et Ω_f, Ω_f^* sont les projecteurs de la structure p.p. P_f sur le fibré (E, π, M). Pour le tenseur de Nijenhuis de F_f on obtient des expressions analogues aux (27) et par suite:

Proposition 3.7. *La structure p.c.p. F_f sur E, associèe à une structure p.p. ou p.c. f sur M, à l'aide d'une connexion linéaire ∇ sur M, est intégrable si et seulement si*

$$\nabla f = 0, \quad R = \alpha \otimes I \tag{30'}$$

où α est une 2-forme sur M.

Soient (g, f) une structure p.h., φ la structure p.s. associée et ∇ une connexion linéaire sur M. Alors pour les trois structures p.c.p. F_g, F_f et F_φ on a

$$F_\varphi = F_f \circ F_g \tag{31}$$

Il en résulte que si deux des ces structures sont intégrables alors la troisi'em'e est aussi intégrable. Enfin on a

Proposition 3.8. *Si (g, f, φ) est une structure kählerienne sur M et ∇ la connexion Levi-Civita de g, alors les structures p.c.p. F_g, F_f, F_φ correspondentes sur E, sont intégrables si et seulement si $R = 0$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Cruceanu, V., *Le fibré des tenseurs de type* $(1,1)$ *sur une variété différentiable.* Ann. Sc. Univ. "Al.I. Cuza" Iaşi, T. XXVIII (1982) s. I.a, f. 1.
2. Due Tong Van, *Sur la géométrie différentielle des fibrés vectoriels.* Kodai Math. Sem. Rep. vol. 26, (1975) p. 349-408.
3. Kobayashi, S. and Noomizu, K., *Foundations of différential geometry*, vol. I and II, Interscience (1963 et 1969).
4. Yano, K. and Ishihara, S., *Tangent and cotangent boundles.* Marcel Dekker, Inc. New York, 1973.