23 Sur la théories des courbes réelles dans les variétés kählériennes

An. Univ. Timişoara,
t. XXVI, f. 1, 1988, 13-20.

1. Soit M_{2n} une variété kählérienne avec la métrique g, la connexion de Levi-Civita ∇ et la structure complexe J. Soient ensuite a un nombre réel positif et $x : [0, a] \longrightarrow M_{2n}$ une courbe réelle de classe C^v, $v \geq n+1$. Nous dirons que x est une courbe générique si les vecteurs des champs

$$x', J(x'), x'', J(x''), ..., x^{(n)}, J(x^{(n)}), \tag{1}$$

où $x^{(p)} = \dfrac{\nabla^p x}{ds^p}$, $p = 1, 2, ..., n$, sont linéairement indépendents dans chaque point x. En posant

$$\begin{gathered} t_1 = x', \;\; \tau_1 = J(t_1), \\ t_p = \frac{x^{(p)} - \sum\limits_{i=1}^{p-1} \left\langle x^{(p)}, t_i \right\rangle t_i - \sum\limits_{i=1}^{p-1} \left\langle x^{(p)}, \tau_i \right\rangle \tau_i}{\left\| x^{(p)} - \sum\limits_{i=1}^{p-1} \left\langle x^{(p)}, t_i \right\rangle t_i - \sum\limits_{i=1}^{p-1} \left\langle x^{(p)}, \tau_i \right\rangle \tau_i \right\|}, \;\; \tau_p = J(t_p), \end{gathered} \tag{2}$$

$p = 2, 3, ..., n$, on obtient une famille de repères $\{t_1, \tau_1, ..., t_n, \tau_n\}$ le long de la courbe x, adaptés à la structure kählérienne de M_{2n} et nommés les repères de Frenet kählériens pour x. Nous dirons que $t_2, ..., t_n$ déterminent les normales principales et $\tau_1, ..., \tau_n$ les normales secondaires de x. Par un calcul analogue à celui fait par Wong [2] nous obtenons les équations de mouvement du repère de Frenet kählérien,

$$\begin{gathered} t'_p = -k_{p-1} t_{p-1} + h_p \tau_p + k_p t_{p+1}, \;\; \tau'_p = -k_{p-1} \tau_{p-1} - h_p t_p + k_p \tau_{p+1}, \\ p = 1, 2, ..., n-1, \end{gathered} \tag{3}$$

où k_p et h_p sont des fonctions réelles définies sur $[0, a]$ et nommées respectivement les *courbures kählériennes principales est secondaires de x.* Pour les courbures principales on a

$$k_0 = k_n = 0, \;\; k_p > 0, \;\; p = 1, 2, ..., n-1. \tag{4}$$

Nous avons par suite

Théorème 1. *Etant donnée sur la variété kählérienne M_{2n} une courbe générique x de classe C^v, $v \geq n+1$, rapportée à son arc comme paramètre, il existe une famille unique de repères adaptés $t_1, \tau_1, ..., t_n, \tau_n$ et $2n-1$ fonctions réelles de l'arc, $k_1, ..., k_{n-1}, h_1, ..., h_n$ avec $k_p > 0$, $p = 1, 2, ..., n-1$, telles que les équations* (3) *et* (4) *soient satisfaites.*

Il faut remarquer que pour une courbe x considérée dans la variété kählérienne (M_{2n}, g, J) le repère de Frenet kählérien est d'ordre de différentiabilité n et les courbures kählériennes correspondantes d'ordre jusqu'à $n+1$. Mais, si x est considérée dans la variété riemannienne (M_{2n}, g) alors le repère de Frenet riemannien est d'ordre de différentiabilite $2n$ et les courbures riemanniennes correspondantes d'ordre jusqu'à $2n+1$. Pour donner une interprétation géométrique à l'annulation des courbures secondaires de x, considérons la famille de n-plans déterminnée par les vecteurs $t_1, t_2, ..., t_n$. Ces n-plans sont parallèles le long de x si et seulement si

$$\frac{\nabla}{ds}(t_1 \wedge t_2 \wedge ... \wedge t_n) = 0. \tag{5}$$

De (3) on déduit

$$\frac{\nabla}{ds}(t_1 \wedge ... \wedge t_n) = h_2(\tau_1 \wedge t_2 \wedge ... \wedge t_n) + \cdots + h_n(t_1 \wedge t_2 \wedge ... \wedge \tau_n)$$

et par suite on a

Proposition 1. *Une courbe $x \subset M_{2n}$ a toutes ses courbures secondaires nulles si et seulement si le n-plan $(t_1, t_2, ..., t_n)_0$ se transporte par parallélisme le long de x.*

Si $M_{2n} = \boldsymbol{R}^{2n}$, avec la structure kählerienne canonique, alors les n-plans $(t_1, ..., t_n)$ sont parallels le long de x s'ils sont parallels dans le sens euclidien et par suite coïncident. Donc, dans ce cas la courbe x est contenue dans un plan à n dimensions de R^{2n}. Cet n-plan étant mené par J dans le n-plan orthogonal $(\tau_1, ..., \tau_n)$ il est un n-plan antiholomorphe de $\boldsymbol{R}^{2n}$. Les équations (3_1) sont les équations de Frenet de x dans le n-plan euclidien qui la contient, $t_1, ..., t_n$ les vecteurs du repère de Frenet et $k_1, ..., k_{n-1}$ les courbures euclidiennes pour x. Les équations (3_2) réprésentent les équations de Frenet pour l'image de x par l'isométrie J.

Supposons maintenant que la courbe $x \subset M_{2n}$ n'est pas générique et soit m le nombre maximum tel que les vecteurs $(x', J(x'), ..., x^{(m)})$ soient linéairement indépendents. Alors, en considérant les formules (2), où $p = 1, 2, ..., m$, on obtient que les vecteurs $t_1, \tau_1, ..., t_m, \tau_m$ sont linéairement indépendents. Par suite, le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendents dans le système (1) est toujours pair. Si ce nombre este $2m$ on peut écrire les équations (3), ou n est remplace par m. De ces équations il résulte

$$\frac{\nabla}{ds}(t_1 \wedge \tau_1 \wedge ... \wedge t_m \wedge \tau_m) = 0. \tag{6}$$

C' est-à-dire

Proposition 2. *Si le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendents dans* (1) *est $2m$, alors les $2m$-plans osculateurs $(t_1, \tau_1, ..., t_m, \tau_m)$ sont parallels le long de x.*

Dans ce cas, considérons le point $x(0)$ de la courbe et complétons le système de vecteurs $(t_1, \tau_1, ..., t_m, \tau_m)$ jusqu'à un repère adapté $\{t_1, \tau_1, ..., t_n, \tau_n\}_0$. En transportant par parallélism le long de x les vecteurs $t_{m+1}, \tau_{m+1}, ..., t_n, \tau_n$ on obtient une famille de repères adaptes le long de x, qui satisfont aux equations (3), dans lesquelles n est remplacé par m et les équations

$$t'_q = 0, \ \tau'_q = 0, \ q = m + l, ..., n. \tag{7}$$

Dans ce cas on peut supposer que la courbe x satisfait aux conditions

$$k_1, k_2, ..., k_{m-1} > 0,\ k_0 = k_m = \cdots = k_{n-1} = 0,\ h_{m+1} = \cdots = h_n = 0$$

et par suite les équations (3) avec $n = m$ et (7) sont ses équations de Frenet kähleriennes. Si $M_{2n} = \boldsymbol{R}^{2n}$ et $2m$ est le nombre maximum de vecteurs (1) linéairement indépendents, alors la courbe x appartient à un $2m$-plan holomorphe, $\{t_1, \tau_1, ..., t_m, \tau_m\}$ est la famille des repères de Frenet dans ce $2m$-plan, $k_1, ..., k_{m-1}, h_1, ..., h_m$ sont les courbures correspondantes et (3), ses équations de Frenet kählériennes. Nous dirons qu'une courbe $x \subset M_{2n}$, pour laquelle $2m$ $(m < n)$ est le nombre maximum de vecteurs (1) linéairement indépendents dans chaque point, est une courbe *$2m$-plane holomorphe.* Pour $m = 1$ on en obtient une géodésique holomorphe de M_{2n}.

Si pour une courbe $2m$-plane holomorphe, toutes les courbures secondaires sont nulles, alors les m-plans $(t_1, ..., t_m)$ sont parallels le long de x et réciproquement. Par suite, on a

Proposition 3. *Une courbe $2m$-plane holomorphe a toutes ses courbures secondaires nulles si et seulement si les m-plans antiholomorphes osculateurs $(t_1, ..., t_m)$ sont parallels le long de x.*

Dans le cas $M_{2n} = \boldsymbol{R}^{2n}$, une telle courbe est située dans un m-plan antiholomorphe et dans ce plan, $\{t_1, ..., t_m\}$ est la famille des repères de Frenet, $k_1, ..., k_{m-1}$ les courbures et (3_1), avec n remplacé par m, les équations de Frenet euclidiennes de la courbe. Les équations (32) sont alors les équations de Frenet pour l'image de la courbe x par J.

2. Considérons maintenant le long de la courbe x une série de directions θ, donnée par le champ de vecteurs unitaires $u = u(s)$. On dit que θ est une série de directions enveloppantes s'il existe les fonctions $\lambda(s)$ et $\mu(s)$ telles que

$$t_1 + (\lambda u)' = \mu u. \tag{8}$$

La série θ est nommée série de directions *concurrentes* s'il existe la fonction $\lambda(s)$ telle que

$$t_1 + (\lambda u)' = 0. \tag{9}$$

Enfin, θ est une série de directions paralle]es si

$$u' = 0. \tag{10}$$

Dans le cas $M_{2n} = \boldsymbol{R}^{2n}$ la série θ est enveloppante si et seulement s'il existe une courbe x^*, tangente aux droites de la série. Elle est concurrante si les droites de la série passent par le même point. Enfin, elle est parallèle si les droites de la série sont parallèles, dans le sens euclidien.

Pour une série enveloppante les fonctions $\lambda(s)$ est $\mu(s)$ sont des invariants de la configuration formée par la courbe x de la série θ et sont nommées respectivement les paramètres *principal* et *secondaire* de la série. Une série concurrente peut être considérée comme une série enveloppante avec $\mu = 0$. Une série θ sera appelé *rigide associée* à la courbe x si le vecteur u fait des angles constants avec les vecteurs du repère de Frenet kählerien de la courbe.

Soient x une courbe générique de M_{2n} et θ une série de directions, rigide associée, qui est orthogonale sur les normales secondaires de x. Donc

$$u = \sum_{p=1}^{n} a_p t_p. \tag{11}$$

Si la série θ est enveloppante alors par multiplication scalaire dans (8), avec u, on obtient

$$a_1 + \lambda' = \mu. \tag{12}$$

En supposant la courbe x générique et la série θ enveloppante, rigide associèe à x, orthogonale sur les normales secondaires et oblique sur la tangente et les normales principales on déduit de (11) et (8)

$$\begin{aligned} &1-\lambda a_1 k_1 = a_1^2 \\ &\lambda(a_{p-1}k_{p-1} - a_{p+1}k_p) = a_1 a_p,\ p = 2, ..., n-1, \\ &\lambda a_p h_p = 0,\ p = 1, 2, ..., n, \\ &\lambda a_{n-1} k_{n-1} = a_1 a_n \end{aligned} \tag{13}$$

Il en résulte

$$k_p = \frac{b_p}{\lambda},\ p = 1, 2, ..., n-1,\ h_p = 0,\ p = 1, 2, .., n \tag{14}$$

où

$$b_p = \frac{a_1(1-a_1^2 - \cdots - a_p^2)}{a_p a_{p+1}},\ p = 1, 2, ..., n-1. \tag{15}$$

On a donc

Proposition 4. *Si une courbe générique x admet une série de directions enveloppantes θ, rigide associée, orthogonale sur les normales secondaires et oblique sur la tangente et les normales principales, alors ses courbures principales sont inversement proportionnelles avec le paramètre principal de la série et les courbures secondaires sont nulles.*

Si, en plus, $\mu = a_1$,, alors de (12) on a $\lambda =$const. et par suite

Proposition 5. *Si une courbe générique x admet une série de directions enveloppantes θ, rigide associée, orthogonale sur les normales secondaires, oblique sur la tangente et les normales principales, dont le paramètre secondaire est égal avec le cosinus de l'angle formé par la direction de la série avec la direction de la courbe, alors les courbures principales sont constantes et les courbures secondaires sont nulles,*

$$k_p = c_p,\ p = 1, 2, ..., n-1,\ h_p = 0,\ p = 1, 2, ..., n. \tag{16}$$

Si les directions de la série θ donnée par (11) sont enveloppantes et orthogonales sur la courbe x, alors $a_1 = 0$ et de (11) et (12) il résulte $n = 2m$ et

$$\begin{aligned} &a_{2p-1} = 0,\ a_{2p} \neq 0,\ h_{2p} = 0,\ p = 1, 2, ..., m,\ k_1 = \frac{1}{\lambda a_2}, \\ &\frac{k_{2p}}{k_{2p+1}} = c_{2p},\ p = 1, 2, ..., m-1, \end{aligned} \tag{17}$$

où les constantes c_{2p} sont donnés par

$$c_{2p} = \frac{a_{2p+1}}{a_{2p}},\ p = 1, 2, ..., m-1. \tag{18}$$

De (17), (18) et du fait que u est unitaire il résulte

$$\lambda = \frac{\pm c}{k_1},\ a_2 = \frac{1}{\pm c},\ a_{2p+2} = \frac{c_2 c_4 ... c_{2p}}{\pm c},\ p = 1, 2, ..., m-1, \tag{19}$$

où $c > 0$ est donné par

$$c^2 = 1 + \sum_{p=1}^{m-1} (c_2 c_4 ... c_{2p})^2. \tag{20}$$

Réciproquement, si la courbe $x \subset M_{4m}$ satisfait aux conditions

$$\frac{k_{2p}}{k_{2p+1}} = c_{2p}, \; p = 1, 2, ..., m-1, \; h_{2p} = 0, \; p = 1, 2, ..., m, \tag{21}$$

alors la série de directions (11), où $a_{2p-1} = 0$ et a_{2p} sont donnés par (19), avec le signe + (par exemple) en face de c, satisfait (8) avec $\lambda > 0$ donné par (19_1) et $\mu = \lambda'$. En appelant *hélice de type* A_0, une courbe x qui satisfait aux conditions (21) on a

Théoreme 2. *Une courbe générique x de M_{2n} est hélice de type A_0 si et seulement s'il existe une série θ de directions enveloppantes, rigide associée à x, qui soit orthogonale sur les normales secondaires, la tangente et les normales principales d'ordre impair du repère de Frenet kählerien de la courbe.*

Si θ, don née par (11), est une série de directions concurrentes, donc $\mu = 0$, alors de (12) on a $\lambda = -a_1 s + b$ et de (14) il résulte

Proposition 6. *Si une courbe générique x de M_{2n} admet une série de directions concurrentes, rigide associée, qui soit orthogonale sur les normales secondaires et oblique sur la tangente et les normales principales, alors ses courbures principales sont inversement proportionnelles avec la même fonction affine de l'arc et les courbures secondaires sont nulles,*

$$k_p = \frac{b_p}{-a_1 s + b}, \; p = 1, 2, .., n-1, \; h_p = 0, \; p = 1, 2, ..., n. \tag{22}$$

Soit θ une série de directions (11) qui est concurrente et orthogonale sur la courbe générique x. Alors de (13) il résulte $n = 2m$ et la série θ est orthogonal sur les normales principales d'ordre impair. Par suite, on a les relations (17) et (18), avec $\lambda =$ const. En posant

$$c_1 = \frac{1}{\lambda a_2}, \tag{23}$$

on déduit que la courbe λ satisfait au conditions

$$k_1 = c_1, \; \frac{k_{2p}}{k_{2p+1}} = c_{2p}, \; p = 1, 2, ..., m-1, \; h_{2p} = 0, \; p = 1, 2, ..., m. \tag{24}$$

Réciproquement si la courbe x satisfait (24) alors la série de directons (11), avec $a_{2p-1} = 0$, et a_{2p} donnés par (18), satisfait (9) avec λ donné par (19) et (23). Si nous appelons *hélice de type* B_0 une courbe générique de M_{4m} qui satisfait aux conditions (24) on en obtient

Théorème 3. *Une courbe générique x de M_{4m} est hélice de type B_0 si et seulement s'il existe une série de directions θ, rigide associèe à x qui soit orthogonale sur les normales secondaires, la tangente et les normales principales d'ordre impair du repère de Frenet kählerien de la courbe.*

Si les directions de la série (12) sont parallèles le long de x, alors de (10) et (3) on obtient

$$a_2 k_1 = 0, \; a_{2p-1} k_{p-1} - a_{p+1} k_p = 0, \; p = 2, 3, ..., n-1, \; a_{n-k} k_{n-1} = 0,$$
$$a_p h_p = 0, \; p = 1, 2, ..., n.$$

La courbe x éant générique, il faut avoir $n = 2m + 1$ et

$$a_{2p} = 0, \; p = 1, 2, ..., m, \; a_{2p-1} = 0, \; p = 1, 2, ..., m + 1, \tag{25}$$

$$\frac{k_{2p-1}}{k_{2p}} = c_{2p-1}, \; p = 1, 2, ..., m, \; h_{2p-1} = 0, \; p = 1, 2, ..., m + 1, \tag{26}$$

où

$$c_{2p-1} = \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}}, \; p = 1, 2, ..., m. \tag{27}$$

Il en résulte, compte tenu du fait que u est unitaire,

$$a_1 = \frac{1}{\pm c}, \; a_{2p+1} = \frac{c_1 c_2 ... c_{2p-1}}{\pm c}, \; p = 1, 2, ..., m \tag{28}$$

où $c > 0$ est donné par

$$c^2 = 1 + \sum_{p=1}^{m} (c_1 c_3 ... c_{2p-1})^2. \tag{29}$$

Réciproquement, si la courbe générique x satisfait aux conditions (26) alors la série de directions (11), avec $a_{2p} = 0$ et a_{2p+1} donnés par (28), satisfait (10). Nous appelons *hélice de type C_0* une courbe générique x qui satisfait (26). On a

Théorème 4. *Une courbe générique x sur M_{4m+2} est une hélice de type C_0 si et seulement s'il existe une série θ de directions parallèles rigide associèe à x, qui soit orthogonale sur les normales secondaires et les normales principales d'ordre pair de la courbe.*

Nous remarquons que les courbe génériques qui satisfont aux conditions (14) ou (22) sont pour n pair hélices particulieres de type A_0 et pour n impair hélices particulières de type C_0. Les courbes qui satisfont (16) sont hélices particulières de type B_0 pour n pair et de type C_0 pour n impair.

3. Pour obtenir des classes plus générales d'hélices sur M_{2n}, nous considérant une série de direction θ, définie par un champ de vecteurs u, donné par (11) et la série de directions planes holomorphes ω engendrée par u et $J(u)$. Nous dirons que la série de directions planes holomorphes ω est *enveloppante* le long de x s'il existe les fonctions $\lambda(s), \mu(s), \alpha(s), \beta(s)$ telles que

$$t_1 + (\lambda u + \mu J(u))' = \alpha u + \beta J(u), \tag{30}$$

concurrente s'il existe les fonctions $\lambda(s)$ et $\mu(s)$ telles que

$$t_1 + (\lambda u + \mu J(u))' = 0 \tag{31}$$

et *parallèle* s'il existe la fonction $\beta(s)$ de façon que

$$u' = \beta J(u). \tag{32}$$

Si $M_{2n} = \boldsymbol{R}^{2n}$, la série ω est enveloppante le long de la courbe x s'il existe une autre courbe x^* pour laquelle le plans de la série soient des 2-plans osculateurs holomorphes. Elle est concurrente si les plans de la série passent par un même point elle est parallèle si les plans de la série sont parallèles dans le sens euclidien.

Soit par suite, θ une série de directions le long de la courbe x donnée par (19), qui détermine une série ω enveloppante de directions planes holomorphes. Alors de (30) et (3) il résulte

$$
\begin{array}{ll}
1-\lambda a_2k_1-\mu a_2h_1=\gamma a_1 & \lambda a_1h_1-\mu a_2k_1=\delta a_1 \\
\lambda(a_{p-1}k_{p-1}-a_{p+1}k_p)-\mu a_ph_p=\gamma a_p & \lambda a_ph_p+\mu(a_{p-1}k_{p-1}-a_{p+1}k_p)=\delta a_p \\
\lambda a_{n-1}k_{n-1}-\mu a_nk_n=\gamma a_n & \lambda a_nh_n+\mu a_{n-1}k_{n-1}=\delta a_n,
\end{array} \tag{33}
$$

où $p=2,3,...,n-1$, $\gamma=\alpha-\lambda'$, $\delta=\beta-\mu'$. La série étant enveloppante on a de (30)

$$
a_1+\mu uJ(u)'=\gamma,\ \lambda u'J(u)=\delta. \tag{34}
$$

Si la série θ est orthogonale sur la courbe x, alors $a_1=0$ et de (33_2) il résulte, compte tenu que x est générique, $\mu=0$. Puis de (34) on a $\gamma=0$ et $\delta=\beta$. Enfin des équations (33) on déduit que $n=2m$ et

$$
\begin{gathered}
a_{2p-1}=0,\ a_{2p}\neq 0,\ h_{2p}=\frac{\beta}{\lambda},\ p=1,2,...,m \\
k_1=\frac{1}{\lambda a_2},\frac{k_{2p}}{k_{2p1}}=c_{2p},\ p=1,2,...,m-1,
\end{gathered} \tag{35}
$$

où les constantes c_{2p} sont donnèes par (18). De (35) et (18) il résulte (19) et (20).

Réciproquement, si la courbe générique x de M_{4m} satisfait ayx conditions

$$
\frac{k_{2p}}{k_{2p+1}}=c_{2p},\ p=1,2,...,m-1,\ h_2=h_4=\cdots=h_{2m}, \tag{36}
$$

alors la série de directions (11) où $a_{2p-1}=0$ et a_{2p} sont donnés par (19), satisfait (30) avec λ donné par (19_1) $\mu=0$, $\alpha=\lambda'$ et $\beta=\lambda h_2$. Une courbe générique x de M_{4m} qui satisfait (36) sera nommée *hélice de type A*. On a donc

Théorème 5. *Une courbe générique x de M_{4m} est hélice de type A si et seulement s'il existe une série de directions θ rigide associé à x, qui soit orthogonale sur les normales secondaires, la tangente et les normales principales d'ordre impair et qui détermine une série de directions planes holomorphes ω, enveloppante le long de la courbe.*

Si θ est une série de directions le long de la courbe x et si la série de directions planes holomorphe ω associée est enveloppante alors les fonctions α,β,λ,μ sont des invariants pour la configuration formée par la série θ est la courbe x. Nous appelons λ et μ les paramètres *principaux* et α,β les paramètres secondaires de la série.

Si la série θ donnée par (11) est orthogonale sur la courbe x, la série ω associée est enveloppante et elle a le premier paramètre secondaire α égal à zéro, alors des équations (33) et (34) il résulte $n=2m$, $\mu=\gamma=0$, $\lambda=$ const., $\delta=\beta$. Dans ce cas on a les équations (35) avec $\lambda=$ const. et par suite la courbe x satisfait aux conditions

$$
k_1=c_1,\ \frac{k_{2p}}{k_{2p+1}}=c_{2p},\ p=1,2,...,m-1,\ h_2=h_4=\cdots=h_{2m}. \tag{37}
$$

Réciproquement, si la courbe x satisfait à ces conditions, alors la série de directions (11), avec $a_{2p-1}=0$, et a_{2p} donnés par (19), satisfait (30), où λ est donné par (19), $\mu=\alpha=0$, $\beta=\lambda h_2$. Une courbe x de M_{4m} qui satisfait aux conditions (37) sera nommée *hélice de type B*. On a

Théorème 6. *Une courbe x de M_{4m} est une hélice de type B si et seulement s'il existe une série de directions θ rigide associée à x orthogonale sur les normales secondaires, la tangente et les normales principales d'ordre impair, telle que la série de directions planes holomorphes ω soit enveloppante et le premier paramètre secondaire soit nul.*

Pour la série θ qui satisfait aux conditions de ce théorème, la relation (30) devient

$$t_1 = (\lambda u)' = \beta J(u). \tag{38}$$

Il est aisé de voir qu'une hélice de type B peut être caractérisede la manière suivante.

Proposition 7. *Une courbe générique x de M_{4m} est hélice de type B si et seulement s'il existe une série de directions θ, rigide associèe à x, orthogonale sur les normales secondaires, la tangente et les normales principales d'ordre impair qui satisfait à la condition* (38).

Pour $M_{4m} = \boldsymbol{R}^{4m}$ la condition (38) exprime le fait que sur chaque droite de la série θ il existe un point $x^*(s)$ qui décrit une courbe tangente dans ce point à la droite de direction $J(u)$.

Si la série θ donnée par (11) détermine une série ω concurrente, alors, de (31) il résulte qu'on a (33) avec $\gamma = -\lambda'$, $\delta = -\mu'$. En supposant la série θ orthogonale sur la tangente ($a_1 = 0$) il résulte $\mu = 0$ et par suite l'equation (31) se réduit à (9). Donc si θ est orthogonale sur x, la concurrence de la série ω est équivalente àvec la concurrence de la série θ et par suite nous obtenons les hélices de type B_0.

Supposons enfin, que la série θ, donnée par (11), détermine une série ω associée, qui est parallèle le long de x. Alors de (32) et (3) on obtient

$$a_{p-1}k_{p-1} - a_{p+1}k_p = 0, \;\; p = 1, 2, ..., n. \tag{39}$$

La courbe x étant générique, il en résulte $n = 2m + 1$ et

$$a_{2p} = 0, \;\; p = 1, 2, ..., m, \;\; a_{2p-1} \neq 0, \;\; p = 1, 2, ..., m + 1 \tag{40}$$

$$\frac{k_{2p-1}}{k_{2p}} = c_{2p-1}, \;\; p = 1, 2, ..., m, \;\; h_1 = h_3 = \cdots = h_{2m+1}, \tag{41}$$

où les constantes c_{2p-1} sont donnèes par (27).

Réciproquement, si la courbe x de M_{4m+2} satisfait aux conditions (41) alors la série θ donnée par (11), où $a_{2p} = 0$ et a_{2p-1} sont donnés par (28) et (29), satisfont à l'equation (32) avec $\beta = h_1$. Une courbe générique x de M_{4m+2} qui satisfait aux conditions (41) sera nommée *hélice de type C*. On a donc

Théorème 7. *Une courbe générique x de M_{4m+2} est une hélice de type C si et seulement s'il existe une série de directions θ rigide associèe à x, orthogonale sur les normales secondaires et les normales principales d'ordre pair, telle que la série de directions planes holomorphes ω correspondante soit parallèle le long de la courbe.*

Nous remarquons enfin, qu'on peut considérer des hélices $2m$-planes holomorphes dans une variété kählerienne M_{2n}, $n > m$, et on obtient des caractérisations analogues, à l'aide des mêmes notions de série de directions enveloppantes, concurrentes et parallèles.

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Cruceanu, *Courbes remarquables sur les variétés riemanniennes modelées par un espace de Hilbert*, Studii şi cercetări matematice. Acad. RSR, t. 41, 1989, 9-14.
2. Y.C. Wong, *Frenet formulas for curves in real, complex and quaternionic euclidean spaces.* Differential Geometry in honor of K. Yano, Kinokuniya, 1972, 525-541.