22 Courbes remarquables sur les variétés riemanniennes, modelées par un espace de Hilbert

Studii şi cercetări matematice.
Acad. R.S.R., t. 41, 1989, 9–14.

Les cercles et les hélices constituent des classes importantes de courbes dans le plan et l'espace euclidien. Leur extention aux espaces euclidiens et riemanniens à un nombre quelconque fini de dimensions à préocupé un grand nombre de géomètres, parmi lesquels nous citons A.H. Hayden [1], M. Syptak [5] et Y.C. Wong [6].

Dans ce travail nous considérons une généralisation de ces courbes au cas des variétés riemanniennes de dimension infinie et présentons des caractérisations géométriques simples, en utilisant les notions de série de directions parallèles, concurrentes et enveloppantes, respectivement dans le sens de T. Levi-Civita [3], A. Myller [4] et K. Yano [7]. Certaines de ces caractérisations sont nouvelles aussi pour le cas fini-dimensionel, où dans ce but a été utilisé seulement la notion de parallélisme qui s'est avérée insuffisante.

1. Soit M une variété différentiable de dimension infinie et de classe C^∞, modélée par un espace de Hilbert séparable et douée d'une structure riemannienne "$\langle,\rangle$" de classe C^∞, [2]. Soient ensuite, a un nombre réel positif et $\gamma : [0, a,] \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞ sur M, rapportée à son arc comme paramètre.

Nous disons que la courbe γ est générique si les vecteurs de champs

$$t_1 = \frac{d\gamma}{ds}, \; t_1^{(n)} = \nabla_{t_1}^{(n)} t_1, \;\; n = 1, 2, ..., \tag{1}$$

où ∇ est la derivation covariante dans la connexion Levi-Civita associée à la structure riemannienne sur M, sont linéairement indépendents dans chaque point de γ. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt on obtient de (1) le système de champs de vecteurs de classe C^∞

$$t_1 = \frac{d\gamma}{ds}, \; t_{n+1} = \frac{t_1^{(n)} - \left\langle t_1^{(n)}, t_1 \right\rangle t_1 - \cdots - \left\langle t_1^{(n)}, t_n \right\rangle t_n}{\|t_1^{(n)} - \left\langle t_1^{(n)}, t_1 \right\rangle t_1 - \cdots - \left\langle t_1^{(n)}, t_n \right\rangle t_n\|}, \tag{2}$$

$n = 1, 2, ...$, nommé le *système de Frenet* associé à la courbe γ. On peut écrire pour tout $n > 1$,

$$t_n = \alpha_n t_1^{(n-1)} + \lambda_n^1 t_1 + \cdots + \lambda_n^{n-1} t_{n-1},$$

où $\alpha_n > 0$ et $\lambda_n^1, ..., \lambda_n^{n-1}$ sont des fonctions C^∞ sur γ.

En posant

$$t'_n = \nabla_{t_1} t_n, \ n = 1, 2, ...,$$

on en obtient, compte tenu de (1) et (2)

$$(3) \qquad t'_n = \sum_{m=1}^{n+1} \beta_n^m t_m, \ n = 1, 2, ...$$

où les fonctions β_n^m satisfont aux conditions

$$\beta_n^{n+1} = \alpha_n \alpha_{n+1}^{-1} > 0, \ \beta_n^m = 0, \ m > n+1, \ n = 1, 2, ...$$

Mais, comme $\langle t_n, t_m \rangle = \delta_{nm}$, on a aussi

$$\beta_n^m + \beta_m^n = 0, \ n, m = 1, 2, ...,$$

et par suite,

$$\beta_n^m = 0 \text{ pour } |n - m| > 2 \text{ et } \beta_n^n = 0, \ \beta_n^{n+1} = -\beta_{n+1}^n > 0, \ n = 1, 2, ...$$

En introduisant les fonctions positives de classe C^∞,

$$(4) \qquad k_n = \alpha_n \alpha_{n+1}^{-1}, \ n = 1, 2, ...,$$

nommées les *courbures* de γ et, en posant $k_0 = 0$, les formules (3) deviennent

$$(5) \qquad t'_n = -k_{n-1} t_{n-1} + k_n t_{n+1}, \ n = 1, 2, ...,$$

qui seront nommées les *formules de Frenet* pour la courbe γ.

2. Soit le long de γ donnée une série de directions θ par le champ de vecteurs unitaires $u = u(s)$ de classe C^∞. Nous dirons que la série θest une série de directions *enveloppantes* [7] s'il existe les fonctions $\lambda, \mu : \gamma \longrightarrow R$ telles que

$$(6) \qquad t_1 + (\lambda u)' = \mu u.$$

La série θ sera nommée série de directions *concurantes* [4] s'il existe la fonction $\lambda : \gamma \longrightarrow R$ telle que

$$(7) \qquad t_1 + (\lambda u)' = 0.$$

Enfin, nous dirons que θ est une série de directions *parallèles* [3] si on a

$$(8) \qquad u' = 0.$$

Pour une série de directions enveloppantes, les fonctions λ et μ sout des invariants de la configuration formée par la courbe γ et la série θ et seront nommés respectivement *les paramètres principal* et *secondaire* de la série θ. Une série de directions concurrentes peut être considerée comme une série de directions enveloppantes avec $\mu = 0$.

Nous dirons que la série de directions θ est *rigide associèe* à la courbe γ si le champ de vecteurs unitaires u de la série est donné par

(9) $$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n,$$

où les coefficients a_n sont constants.

3. Considérons maintenant une série θ de directions enveloppantes rigide associèe à γ. Alors en substituant μ donné par (9) dans (6) on obtient, compte tenu de (5),

(10) $$1 - \lambda a_2 k_1 = \nu a_1, \ \lambda(a_{n-1}k_{n-1} - a_{n+1}k_n) = \nu a_n, \ n = 1, 2, ...,$$

où nous avons posé

(11) $$\nu = \mu - \lambda'.$$

De (6), par multiplication scalaire avec u, on obtient

(12) $$\nu = a_1$$

et par suite les relations (10) peuvent être écrites,

(13) $$1 - \lambda a_2 k_1 = a_1^2, \ \lambda(a_{n-1}k_{n-1} - a_{n+1}k_n) = a_1 a_n, \ n = 1, 2, ...$$

Réciproquement, s'il existe la fonction λ telle que les relations (13) soient satisfaites, alors en posant $\mu = \lambda' + a_1$ on aura la relation (6) et par suite la série (9) sera enveloppante. On a donc

Proposition 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe générique γ possède une série θ de directions enveloppantes, rigide associée, est qu'il existe une fonction $\lambda : \gamma \longrightarrow R$, telle que les relations* (13), *soient remplies.*

De (13) il résulte

(14) $$\lambda a_n a_{n+1} k_n = a_1(1 - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2), \ n = 1, 2, ...$$

En supposant $a_n \neq 0$,, $(n = 1, 2, ...)$, et en posant

$$b_n = \frac{a_1(1 - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2)}{a_n a_{n+1}}$$

on obtient de (14)

(15) $$k_n = \frac{b_n}{\lambda}, \ n = 1, 2, ...,$$

et par suite, on a

Proposition 2. *Si une courbe générique γ admet une série θ de directions enveloppantes, rigide associée et oblique sur toutes les directions du système de Frenet, alors ses courbures sont inversement proportionnelles avec le paramètre principal de la série θ.*

De (11) et (12) il résulte que pour $\mu = a_1$ on a $\lambda =$ const. et par suite

Proposition 3. *Si une courbe générique γ admet une série θ de directions enveloppantes, rigide associée et oblique sur toute les directions du système de Frenet dont le paramètre secondaire est égal avec le cosinus de l'angle formé par la direction de θ avec la direction tangente à γ, alors toutes les courbures de γ sont constantes.*

En supposant que la série θ, de directions enveloppantes, rigide associée, est orthogonale à γ, c'est-à-dire $a_1 = 0$, alors de (13) on obtient qu'elle est orthogonale sur toutes les directions d'ordre impaire et oblique sur toutes les directions d'ordre paire du système de Frenet. Dans ce cas on a

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} \neq 0,\ k_1 = \frac{1}{\lambda a_2},\ \frac{k_{2n}}{k_{2n+1}} = c_{2n},\ n = 1, 2, ... \tag{16}$$

où les constantes c_{2n} sont donnèes par

$$c_{2n} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \tag{17}$$

De (16), (17) et du fait que le vecteur u est unitaire, il résulte,

$$\lambda = \frac{\pm c}{k_1},\ a_2 = \frac{1}{\pm c},\ a_{2n+2} = \frac{c_2 c_4 ... c_{2n}}{\pm c},\ n = 1, 2, ... \tag{18}$$

où $c > 0$ est donné par

$$c^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_2 c_4 ... c_{2n})^2. \tag{19}$$

Réciproquement, si la courbe générique γ possède la propriété qu'il existe les constantes c_{2n} telles que

$$\frac{k_{2n}}{k_{2n+1}} = c_{2n},\ n = 1, 2, ..., \sum_{n=1}^{\infty} (c_2 c_4 ... c_{2n})^2 < \infty, \tag{20}$$

alors la série de directions (9), où $a_{2n-1} = 0$ et a_{2n} sont donnés par (18) avec le signe + (par exemple), en face de c, vérifie les relations (6) avec $\lambda > 0$ donné par (18_1) et $\mu = \lambda'$.

Une courbe générique γ qui satisfait aux conditions (20) sera nommée *hélice de type A*. On a donc

Théorème 1. *Une courbe générique γ est hélice de type A si et seulement s'il existe une série θ de directions enveloppantes, rigide associée, orthogonale sur toutes les directions d'ordre impaire du système de Frenet de la courbe.*

4. En continuant, supposons θ une série de directions concurentes le long de γ. En considérant, alors $\mu = 0$ dans (11) et (12) on obtient

$$\lambda = a_1 s + b \tag{21}$$

et compte tenu de (15), on a

Proposition 4. *Si la courbe générique γ admet une série θ de directions concurentes, rigide associée et oblique sur toutes les directions du système de Frenet de γ, alors les courbures sont inversement proportionnelles avec la même fonction affine de l'arc,*

$$k_n = \frac{b_n}{-a_1 s + b},\ n = 1, 2, ... \tag{22}$$

Si la série θ de directions concurrentes est orthogonale à γ, de (13) il résulte que θ est orthogonale sur les directions t_{2n-1} et oblique sur les directions t_{2n}, $(n = 1, 2, ...)$. Par suite, les relations (17) et (18) ont lieu, avec $\lambda = \text{const}$. Dans ce cas on a aussi

$$k_1 = c_1, \; c_1 = \frac{1}{\lambda a_2}. \tag{23}$$

Inversement, si la courbe γ possède la propriété qu'il existe les constantes c_1 et c_{2n} $(n = 1, 2, ...)$ telles que les relations (20) et (23) soient remplies, alors la série de directions (9) avec $a_{2n-1} = 0$ et a_{2n} donnèes par (18) et (19), satisfait la condition (7) avec λ déterminé de (18_1) et (23).

Une courbe générique γ qui satisfait aux conditions (20) et (23_1) sera nommée *hélice de type B*. On a par suite

Théorème 2. *Une courbe générique γ est hélice de type B si et seulement s'il existe une série θ de directions concurrentes, rigide associée, orthogonale sur toutes les directions d'ordre impaire du système de Frenet de la courbe.*

5. Soit enfin, une série θ de directions parallèles le long de la courbe générique γ, qui est rigide associèe à γ. Alors en substituant de (9) en (8) et en tennant compte de (5) on obtient

$$a_{2n} = 0, \; a_{2n-1}k_{2n-1} - a_{2n+1}k_{2n} = 0, \; n = 1, 2, ... \tag{24}$$

La courbe étant générique, il en résulte $a_{2n-1} \neq 0$, $n = 1, 2, ...$, et par suite on a

$$\frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} = c_{2n-1}, \; n = 1, 2, ..., \tag{25}$$

où les constantes c_{2n-1} sont donnèes par

$$c_{2n-1} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}, \; n = 1, 2, ... \tag{26}$$

De (26) et du fait que le vecteur u est unitaire on déduit

$$a_1 = \frac{1}{\pm c}, \; a_{2n+1} = \frac{c_1 c_3 ... c_{2n-1}}{\pm c}, \; n = 1, 2, ... \tag{27}$$

où $c > 0$ est donné par la relation

$$c^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_1 c_3 ... c_{2n-1})^2. \tag{28}$$

Réciproquement, si la courbe γ possède la propriété qu'il existe les constantes c_{2n-1} telles que

$$\frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} = c_{2n-1}, \; n = 1, 2, ..., \; \sum_{n=1}^{\infty} (c_1 c_3 ... c_{2n-1})^2 < \infty, \tag{29}$$

alors la série de directions (9), où $a_{2n} = 0$ et a_{2n+1} sont donnèes par (27) satisfait à la condition (8).

Une courbe générique γ qui satisfait aux conditions (29) sera nommé *hélice de type C*. On a donc

Théorème 3. *Une courbe générique γ est hélice de type C si et seulement s'il existe une série θ de directions parallèles, rigide associée, orthogonale sur toutes les directions d'ordre paire du système de Frenet de la courbe.*

Remarque. Les courbes donnèes par la Proposition 2 sont des hélices de type A ou C particulières et ceux donnèes par la Proposition 3 sont des hélices de type B ou C particulières.

Dans le cas d'une variété M de dimension finie, une courbe γ sera générique si les vecteurs (1) sont linéairement indépendents pour $n = 1, 2, ..., \dim M - 1$. Il résulte alors des théorèmes 1-3 qu'une courbe générique peut être une hélice de type A ou B seulement si la dimension de M est paire et de type C si M a la dimension impaire. Dans ce cas, Hayden [1] a trouvé une caractérisation pour les hélices de type C à l'aide de la notion de série de directions parallèles et pour les helice de type A et B il a montré qu'elles ne peuvent par être caractérisées à l'aide du parallélisme des directions. Il est intéressant de remarquer que les notions de série de directions enveloppantes ou concurrentes nous permettent maintenant de donner des caractérisations simples pour les hélices de type A ou B, respectivement par les théorèmes 1 ou 2, aussi pour le cas de la dimension de M finie.

BIBLIOGRAPHIE

1. A.H. Hayden, *On a generalized helix in Riemannian n-space.* Proc. London Math. Soc., (2), 32 (1931), 337-345.
2. S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds.* New York, London, 1962, 135-136.
3. T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana.* Rend. Circ. Mat. Palermo, XLII (1917), 173- 204.
4. A. Myller, *Directions concurrentes dans une variété métrique à n dimensions.* Bull. Soc. Math. France 56, 1-6.
5. M. Syptak, *Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p dimensions.* C.R. Acad. Sci. Paris, 195 (1932), 298-299.
6. Y.C. Wong, *On the generàlized helices of Hayden and Syptak in an N-space.* Proc. Cambridge Ph. Soc., 37 (1941), 229-243.
7. K. Yano, *On the torse forming directions in Riemannian space.* Proc. Imp. Acad. Tokio, 20, (1944), 340-345.