24 Objets géométriques semi-basiques sur le fibré tangent

An. şt. Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi
Matematica, 35 (1989), 179-189.

Les recherches sur le fibré tangent et les espaces de Finsler et Lagrange ont mis en évidence une classe d'objets géométriques, sur la variété tangente TM, à une variété différentiable M, nommés M-objets [8]-[10], objets Finsler [1], [4], [5], [6] ou objets distingués [7], qui se comportent au changement de la carte comme certains objets sur la variété M. Un étude général et systématique de ces objets a été fait récemment par R. Miron et M. Anastasiei [1], [5], [6].

En partant du fait qu'un champ de M-tenseurs peut être interprété comme un champ de tenseurs semi-basiques [3], [6], [9], [10], nous nous proposons dans ce travail de donner certains caractérisations pour les champs semi-basiques et de déterminer les dérivations et les connexions linéaires sur la variété tangente qui préservent l'algèbre de ces chamnps.

1. Connexions non linéaires. Pour une variété paracompacte M, de classe C^∞, soient $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles, $\mathcal{D}^p_q(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs de type (p,q) et $\mathcal{D}(M)$ l'algèbre tensorielle. Soient puis, TM le fibré tangent à M, π la projection canonique, $VTM = \operatorname{Ker}\pi'$ le sous-fibré vertical de $T(TM)$ et $V^\perp TM = \operatorname{Im}\pi^*$, le sous-fibré de $T^*(TM)$, orthogonal à VTM. Notons par WTM le fibré facteur de $T(TM)$ par VTM et par $W^\perp TM$ le fibré facteur de $T^*(TM)$ par $V^\perp TM$. On obtient les suites exactes suivantes de fibrés sur TM

$$0 \longrightarrow VTM \xrightarrow{i} T(TM) \xrightarrow{p} WTM \longrightarrow 0, \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow V^\perp TM \xrightarrow{i^*} T^*(TM) \xrightarrow{p^*} W^\perp TM \longrightarrow 0 \tag{2}$$

où i et p sont respectivement l'injection et la projection canonique.

Un carte locale (U,φ) sur M, avec $\varphi(x) = (x^i)$, la base naturale $(\partial/\partial x^i)$ et la base réciproque (dx^i), induit sur TM la carte locale adaptée $(\pi^{-1}(U),\Phi)$ avec $\Phi(x,y) = (x^i\circ\pi, y^i)$, où $y = y^i\,\partial/\partial x^i$, la base $(\partial/\partial x^i, \partial/\partial y^i)$ et la cobase (dx^i, dy^i). En posant pour $A \in T(TM)$ et $\alpha \in T^*(TM)$, $p(A) = \hat{A}$ et $p^*(\alpha) = \overset{\wedge}{\alpha}$, on obtient pour WTM et $W^\perp TM$ les bases naturelles

$$\widehat{\partial/\partial x^i} = p(\partial/\partial x^i), \quad \widehat{dy^i} = p^*(dy^i). \tag{3}$$

Une connexion non linéaire sur M peut être définie comme une scission à droite N de classe C^∞ de la suite exace (1), i.e. un TM-morphisme de fibrés vectoriels $N : WTM \longrightarrow T(TM)$ avec la propriété

$$p \circ N = 1_{WTM}. \tag{4}$$

Il en résulte que $HTM = N(WTM)$ est un sous-fibré de $T(TM)$ supplémentaire à VTM, nommé le sous-fibré *horizontal* associé à la connexion N. Par suite, la connexion nonlinéaire N définit un plongement du fibré WTM dans le fibré $T(TM)$, qui détermine une normalization de la distribution intégrable verticale. La scission N a l'expression locale

$$N(\widehat{\partial/\partial x^i}) = \partial/\partial x^i - N_j^i \partial/\partial y^j, \tag{5}$$

et par suite, en posant $\delta/\delta x^i = N(\widehat{\partial/\partial x^i})$ on obtient une base locale pour le sous-fibré HTM, nommé *adaptée* à la connexion non linéaire N. La scission N détermine une scission N^* de la suite (2) par la condition $N^*(\hat{\alpha})(N(\hat{A})) = 0$. On en obtient

$$N^*(\widehat{dy^i}) = dy^i + N_j^i dx^j. \tag{6}$$

$H^\perp TM = N^*(W^\perp TM)$ est le sous-fibré de $T^*(TM)$ orthogonal à HTM. Donc N^* détermine une normalisation pour la distribution intégrable $V^\perp TM$ de la variété $T^*(TM)$. En posant $\delta y^i = N^*(dy^i)$ on obtient une base locale pour $H^\perp TM$, adaptée à la connexion N^*.

Les sections de VTM seront nommées champs de vecteurs *verticaux* et ceux de $V^\perp TM$ serons nommées 1-formes *horizontales*, sur la variété TM. Une 1-forme horizontale est une 1-forme sur TM qui est nulle sur les champs verticaux. Les sections de HTM sont nummées champs de vecteurs *horizontaux* et ceux de $H^\perp TM$, 1-formes *verticales*. Une 1-forme verticale est nulle sur les chamnps de vecteurs horizontaux. De la loi de transformation des bases naturelles au chamgement dela carte il résulte des isomorphismes entre VTM et WTM et entre $V^\perp TM$ et $W^\perp TM$. De la loi de transformations de bases, adaptées à la connexion N, il résulte aussi des isomorphismes entre VTM, HTM, WTM et entre $V^\perp TM$, $H^\perp TM$, $W^\perp TM$, qui dépendent de la connexion considérée.

2. Champs de tenseurs semi-basiques

Définition 1. On appelle *champ de M-tenseurs* [8], [10], ou *de tenseurs Finsler* [1], [4]-[6] ou encore *de tenseurs distingués* [7] de type (p, q) un objet géometrique $\tilde{t}$ sur la variété TM dont les coordonnées $\tilde{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x, y)$ se transforment au changement de la carte locale comme les coordonnées d'un champ de tenseurs de type (p, q) sur M

$$\tilde{t}^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \tilde{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}. \tag{7}$$

Il en résulte qu'en posant dans toute carte locale

$$\bar{t} = \tilde{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x, y) \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}, \tag{8}$$

on obtient un champ de tensuers de type (p, q) sur TM. Réciproquement, si un champ de tenseurs $\bar{t}$ sur TM a dans toute carte locale l'expression (8), alors les fonctions $\tilde{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x, y)$ se transforment selon (7) et par suite sont les coordonnées d'un champs de M-tenseurs de type (p, q). Compte tenu des isomorphismes naturels entre VTM et WTM et entre $V^\perp TM$ et $W^\perp TM$, on en obtient le résultat partiellement connu [1], [5], [6], [8], [10].

Proposition 1. *Un champ de M-tenseurs sur TM peut être interprété naturellement comme une section sur l'un quelconque des fibrés* $(VTM)^p \otimes (V^\perp TM)^q$, $(VTM)^p \otimes (W^\perp TM)^q$, $(WTM)^p \otimes (V^\perp TM)^q$, $(WTM)^p \otimes (W^\perp TM)^q$.

En tenant compte des isomorphismes définis par une connexion non linéaire sur TM on a aussi [1], [5], [6], [8], [9], [10].

Proposition 2. *Etant donnée une connexion non linéaire sur TM, un champ de M-tenseurs de type* (p, q) *peut être interprété comme une section sur l'un des fibrés* $(HTM)^p \otimes (V^\perp TM)^q$, $(HTM)^p \otimes (W^\perp TM)^q$, $(HTM)^p \otimes (H^\perp TM)^q$, $(VTM)^p \otimes (H^\perp TM)^q$, $(WTM)^p \otimes (H^\perp TM)^q$.

On vérifie facilement que l'ensemble des M-tenseurs sur TM est une algèbre sur $\mathcal{F}(TM)$ qui sera noté par $\widetilde{\mathcal{D}}(TM)$. La correspondance (8) nous conduit à la

Définition 2. On appelle *champ de tenseurs semi-basiques* [3], [9], [10] de type (p, q) sur TM un champ de tenseurs sur TM qui, dans toute carte locale a une expression de la forme (8).

L'ensemble $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ des champs de tenseurs semi-basiques est une sous-algèbre de $\mathcal{D}(TM)$, qui est isomorphe avec l'algèbre $\widetilde{\mathcal{D}}(TM)$, par l'application (8). Compte tenu de la loi de transformation des coordonnées d'un tenseur sur TM, au changement de la carte on obtient

Proposition 3. *Pour tout champ de tenseurs T de type* (p, q) *sur TM, donné localement par*

(9)
$$T = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{q} T^{i_1 \dots i_\alpha n+i_{\alpha+1} \dots n+i_p}_{j_1 \dots j_\beta n+j_{\beta+1} \dots n+j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_\alpha}} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_{\alpha+1}}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}}$$
$$\otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_\beta} \otimes dy^{j_{\beta+1}} \otimes \cdots dy^{j_q}$$

en posant

(10)
$$\bar{t} = T^{i_1 \dots i_p}_{n+j_1 \dots n+j_q} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q},$$

on obtient un champ de tenseurs semi-basiques sur TM. *Nous appelons* $\bar{t}$ *le champ de tenseurs semi-basiques associé à* T.

Pour trouver une interprétation géométrique de l'association précédente nous considérons la structure presque-tangente naturelle J sur TM, qui est le relèvement vertical [11] du champ I de Kronecker sur M et qui a l'expression locale

(11)
$$J(\partial/\partial x^i) = \partial/\partial y^i, \ J(\partial/\partial y^i) = 0.$$

En définissant l'application $\mu : \mathcal{D}(TM) \longrightarrow \mathcal{D}(TM)$ par

(12)
$$\mu(f) = f, \ \mu(A) = J(A), \ \mu(\alpha) = \alpha \circ J, \ \mu(T)(\alpha, ..., A, ...) = T(\alpha \circ J, ..., J(A)...)$$

pour $f \in \mathcal{F}(TM)$, $A \in \mathcal{D}^1(TM)$, $\alpha \in \mathcal{D}_1(TM)$ et $T \in \mathcal{D}^q_p(TM)$, on a

Proposition 4. *L'application* μ *est un endomorphisme nilpotent de l'algèbre* $\mathcal{D}(TM)$, *dont l'image est la sous-algèbre* $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ *des champs de tenseurs semi-basiques.*

En effet, en considérant T donné localement par (9) on obtient $\mu(T) = \bar{t}$, donné par (10). On vérifie facilement que μ est un endomorphisme et que $\mu^2 = 0$. Enfin en prenant une connexion non linéaire sur TM et en posant pour un champ $\bar{t} \in \overline{\mathcal{D}}^p_q(TM)$, dans toute carte locale

$$T = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \delta y^{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta y^{j_q}, \tag{13}$$

on obtient $\mu(T) = \bar{t}$, i.e. $\mu(\mathcal{D}(TM)) = \overline{\mathcal{D}}(TM)$.

Remarquons que les champs de vecteurs semi-basiques coïncident avec les champs verticaux et que les 1-formes semi-basiques sont ceux horizontales. Des expressions locales (8) et (9) on obtient

Proposition 5. *Un champs de tenseurs de type (p, q) avec $p + q > 1$ sur TM est semi-basique si et seulement s'il est nul quand un des arguments est champ de vecteurs ou 1-forme semi-basique.*

3. Dérivations semi-basiques

Définition 3. Une dérivation D de l'algèbre $\mathcal{D}(TM)$ s'appelle *semi-basique* si elle préserve la sous-algèbre $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ des champs de tenseurs semi-basiques.

En posant pour $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{D}(TM))$

$$t = J \circ D \circ J \tag{14}$$

on constate que t est un champ de tenseurs semi-basique de type (1,1) qui sera appelé *associé* à D. On a

Proposition 6. *La dérivation D est semi-basique si et seulement si le champ de tenseurs t associé est nul.*

En effet, si D est semi-basique, alors pour $A \in \mathcal{D}^1(TM)$, $J(A)$ est vertical et comme $DJ(A)$ doit être aussi vertical, on a $JDJ = 0$, i.e. $t = 0$. Réciproquement, si $t = 0$, alors comme pour B verticl il existe $A \in \mathcal{D}^1(TM)$ tel que $B = JA$, on a $J(DB)J = DJ(A) = t(A) = 0$, i.e. DB est vertical. Si α est une 1-forme horizontale, de $D\alpha(A) = D(\alpha(A)) - \alpha(DA)$ il résulte que $D\alpha(A) = 0$ pour A vertical i.e. $D\alpha$ est horizontale. Enfin, pour $T \in \mathcal{D}^p_q(TM)$ avec $p + q > 1$, de

$$\begin{aligned} DT(\alpha^1, \dots, \alpha^p, A_1, \dots, A_q) &= D(T(\alpha^1, \dots, \alpha^p, A_1, \dots, A_p)) - \\ &- \sum_{i=1}^{p} T(\alpha^1, \dots, D\alpha^i, \dots, \alpha^p, A_1, \dots, A_q) - \\ &- \sum_{j=1}^{q} T(\alpha^1, \dots, \alpha^p, A_1, \dots, DA_j, \dots, A_q) \end{aligned} \tag{15}$$

il résulte que DT est nul si un de ses arguments est un champ de vecteurs vertical ou une 1-forme horizontale, i.e. DT est semi-basique. De cette démonstration il résulte

Proposition 7. *Une dérivation $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{D}(TM))$ est semi-basique si et seulement si elle préserve les champs de vecteurs verticaux.*

Une dérivation semi-basique induit par restriction une dérivation dans la sous-algèbre $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ et par suite sur les fibrés VTM et $V^{\perp}TM$, qui sera noté par $\overline{\mathcal{D}}$.

L'endomorphisme J détermine une relation d'équivalence sur l'algèbre $\mathcal{D}(TM)$ par

$$T_1 \equiv T_2 (\mathrm{mod}\, J) \Longleftrightarrow \mu(T_1) = \mu(T_2). \tag{16}$$

Définition 4. La dérivation D s'appelle *compatible* avec la relation d'équivalence définie par J sur $D(TM)$ si et seulement si

$$T_1 \equiv T_2 (\mathrm{mod}\, J) \Longrightarrow DT_1 \equiv DT_2 (\mathrm{mod}\, J). \tag{17}$$

Proposition 8. *Une dérivation $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{D}(TM))$ est compatible avec la relation d'équivalence définie par J si et seulement si elle est semi-basique.*

En effet, si D satisfait (17), alors comme pour $A \in \mathcal{D}^1(TM)$ on a $J(JA) = 0$, de (17) il résulte $J(DJA) = 0$, i.e. $t = 0$, c'est-à-dire D est semi-basique. Réciproquement, soient $t = 0$ et $T \in \mathcal{D}^p_q(TM)$ tel que $\mu(T) = 0$, i.e. $T(\alpha_1 \circ J, ..., \alpha_p \circ J, J(A_1), ..., J(A_q)) = 0$. Comme, pour $\alpha \in \mathcal{D}_1(TM)$ et $A \in \mathcal{D}^1(TM)$ il existe β et B tels que $D(\alpha \circ J) = \beta \circ J$ et $D(JA) = JB$, on a des (12) et (15)

$$\begin{aligned}\mu(DT)(\alpha_1, ..., \alpha_p, A_1, ..., A_q) = D(T(\alpha_1 \circ J, ..., \alpha_p \circ J, JA_1, ..., JA_q) - \\ -\sum_{i=1}^{p} T(\alpha_1 \circ J, ..., \alpha_i \circ J, ..., \alpha_p \circ J, JA_1, ..., JA_q) - \\ -\sum_{j=1}^{q} T(\alpha_1 \circ J, ..., \alpha_p \circ J, JA_1, ..., JB_j, ..., JA_q) = 0.\end{aligned}$$

En posant $T = T_1 - T_2$, il en résulte la compatibilité cherchée.

Soit D une dérivation semi-basique et posons

$$\overset{\vee}{D} f = Df, \ \overset{\vee}{D} \bar{t} = \mu(DT), \tag{18}$$

pour $f \in \overline{\mathcal{F}}(TM)$, $\bar{t} \in \overline{\mathcal{D}}(TM)$ et $T \in \mathcal{D}(TM)$ tel que $\mu(T) = \bar{t}$. De (17) il résulte que $\overset{\vee}{D}\bar{t}$ ne dépend pas de T tel que $\bar{t} = \mu(T)$ et par suite on a une application $\overset{\vee}{D} : \overline{\mathcal{D}}(TM) \longrightarrow \overline{\mathcal{D}}(TM)$. Comme μ est un endomorphisme et D une dérivation, il résulte que $\overset{\vee}{D}$ est une dérivation dans l'algèbre $\overline{\mathcal{D}}(TM)$, nommée induie par *transport* relatif à J, par la dérivation semi-basique D.

Soient $A \in \mathcal{D}^1(TM)$ et $B = JA$. Des $\overline{D}B = DB$ et $\overset{\vee}{D}B = J(DA)$ il résulte $\overline{D}B = \overset{\vee}{D}B$ si et seulement si $D(JA) = J(DA)$, c'est-à-dire $DF = D \circ J - J \circ D = 0$. En résumant on a

Proposition 9. *Une dérivation D dans l'algèbre $\mathcal{D}(TM)$ est semi-basique si et seulement si $J \circ DJ = 0$. Dans ce cas elle induit par restriction et par transport relatif à J deux dérivations dans l'algèbre dans l'algèbre des tenseurs semi-basiques. Ces dérivations coïncident si et seulement si on a*

$$DJ = 0. \tag{19}$$

On peut constater que $DJ = 0$ si et seulement si D commute avec μ.

Dans une carte locale sur TM on a pour une dérivation D

$$D(x^i) = D^i,\ D(y^i) = D^{n+i},$$

(20) $$D\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = D^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} + D^{n+i}_j \frac{\partial}{\partial y^i},\ D\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = D^i_{n+j} \frac{\partial}{\partial x^i} + D^{n+i}_{n+j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

et par suite

(21) $$D(dx^i) = -D^i_j dx^j - D^i_{n+j} dy^j,\ D(dy^i) = -D^{n+i}_j dx^j - D^{n+i}_{n+j} dy^j.$$

Il en résulte que D est semi-basique si et seulement si

(22) $$D^i_{n+j} = 0.$$

Dans ce cas dans l'algèbre $\overline{\mathcal{D}}(TM)$, on a pour la dérivation D

(23) $$\overline{D}^i = D^i,\ \overline{D}^{n+i} = D^{n+i},\ \overline{D}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = D^{n+i}_{n+j} \frac{\partial}{\partial y^i},\ \overline{D}(dx^i) = -D^i_j dx^j.$$

Pour la dérivation $\overset{\vee}{D}$ on obtient

(24) $$\overset{\vee}{D}{}^i = D^i,\ \overset{\vee}{D}{}^{n+i} = D^{n+i},\ \overset{\vee}{D}(\partial/\partial y^j) = D^i_j \partial/\partial y^i,\ \overset{\vee}{D}(dx^i) = -D^{n+i}_{n+j} dx^j.$$

Les dérivations $\overline{D}$ et $\overset{\vee}{D}$ coïncident si et seulement si à coté de (22) on a

(25) $$D^i_j = D^{n+i}_{n+j}.$$

Si D est la dérivation définie par un champ de tenseurs $S \in \mathcal{D}^1_1(TM)$, alors elle est semi-basique si et seulement si on a $J \circ S \circ J = 0$, i.e. le champ de tenseurs semi-basique associé à S est nul. Dans ce cas, les deux dérivations induites sur $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ coïncident si et seulement si on a aussi $S \circ J = J \circ S$.

Si D est la dérivation de Lie $\mathcal{L}_A$, définie par le champ de vecteurs $A \in \mathcal{D}^1(TM)$, elle sera semi-basique si et seulement si $J \circ \mathcal{L}_A J = 0$. Elle induira la même dérivation par restriction et transport sur $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ si et seulement si $\mathcal{L}_A J = 0$. De l'expression locale

$$\mathcal{L}_A(x^i) = A^i,$$

$$\mathcal{L}_A(y^i) = A^{n+i},$$

$$\mathcal{L}_A\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -\frac{\partial A^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial A^{n+i}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$\mathcal{L}_A\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial A^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial A^{n+i}}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^i},$$

et de (22) il résulte que $\mathcal{L}_A$ est semi-basique si et seulement si $\partial A^i/\partial y^j = 0$, i.e. $A^i = A^i(x)$ et par suite A est projectable. Puis, $\mathcal{L}_A$ va induire la même dérivation par restriction et transport sur $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ si et seulement si on a encore $\partial A^i/\partial x^j = \partial A^{n+i}/\partial y^j$, c'est-à-dire

$$A^{n+i} = \partial A^i(x)/\partial x^j y^j + B^i(x).$$

Par suite

$$A = A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i} + B^i(x) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

i.e. $A = X^c + Y^v$, ou X^c et Y^v sont respectivement les relèvement complet et vertical des champs de vecteurs $X = X^i\partial/\partial x^i$ et $Y = B^i\partial/\partial x^i$ sur M.

Soient N une connexion non linéaire sur TM et F la structure presque-produit associée, définie par

$$F(A) = -A^v + A^h, \ \forall\, A \in \mathcal{D}^1(TM),$$

où A^v et A^h sont les composants verticale et horizontale de A. Si D est une dérivation semi-basique, comme elle préserve la distribution verticale, on a

$$F(D(A^v)) = -DA^v = D(F(A^v)), \ \forall\, A \in \mathcal{D}^1(TM).$$

D va préserver aussi la distribution horizontale si et seulement si

$$F(DA^h)) = DA^h = D(F(A^h)), \ \forall\, A \in \mathcal{D}^1(TM),$$

et par suite $DF = 0$. Nous pouvons donner la

Définition 5. On appelle *dérivation de type Finsler sur TM, associée à la connexion non linéaire N*, une dérivation D qui préserve les distributions verticale et horizontale et induit la même dérivation par restriction et transport relatif à J, sur VTM.

Des considérations précédentes on a

Proposition 10. *Une dérivation D sur TM est de type Finsler, relatif à la connexion non linéaire N, si et seulement si*

$$DJ = DF = 0. \tag{26}$$

Localement, une dérivation de type Finsler est caractérisée par les conditions (22), (25) et

$$D_j^{n+i} = D(N_j^i) + D_h^i N_j^h - D_j^h N_h^i. \tag{27}$$

Dans la base $(\delta/\delta x^i, \partial/\partial y^i)$, adaptée à la connexion non l inéaire N, une dérivation de type Finsler a l'expression

$$D(x^i) = D^i,\ D(y^i) = D^{n+1},\ D\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) = D_j^i\,\frac{\delta}{\delta x^i},\ D\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = D_j^i\,\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{28}$$

Compte tenu que la relation d'équivalence sur $T(TM)$ (resp. $T^*(TM)$) définie par le sous-fibré VTM (resp. $V^\perp TM$) coïncide avec la relation d'équivalence définie par J (resp. J^*), il résulte que les fibrés obtenus par la factorisation de $T(TM)$ (resp. $T^*(TM)$) par le noyau de J (resp. J^*) coïncide avec WTM (resp. $W^\perp TM$)). On a donc les diagrames commutatives

$$\begin{tikzcd} T(TM) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "p"'] & VTM \\ WTM \arrow[ur, "K"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^*(TM) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, "p"'] & V^\perp TM \\ W^\perp TM \arrow[ur, "K^*"'] & \end{tikzcd} \tag{29}$$

où $K(\hat{A}) = J(A)$ et $K^*(\hat{\alpha}) = J^*(\alpha)$. Il en résulte qu'une dérivation sur $T(TM)$, donc aussi sur $T^*(TM)$ induit une dérivation sur le fibré WTM et aussi sur $W^\perp TM$ si et seulement si est semi-basique. Donc pour une dérivation semi-basique D, en posant

$$\hat{D} f = Df,\ \ \hat{D}\hat{A} = \widehat{DB},\ \ \hat{D}\hat{\alpha} = \widehat{D\beta}, \tag{30}$$

où $p(B) = \hat{A}$ et $p^*(\beta) = \overset{\wedge}{\alpha}$, on obtient une dérivation $\hat{D}$ sur les fibrés facteurs WTM et $W^{\perp}TM$. Pour cette dérivation on a dans une carte locale

$$\hat{D}{}^i = D^i,\ \hat{D}{}^{n+i} = D^{n+i},\ \hat{D}\left(\overset{\wedge}{\frac{\partial}{\partial x^j}}\right) = D^i_j\,\overset{\wedge}{\frac{\partial}{\partial x^i}},\ \ \hat{D}\left(\widehat{dy^i}\right) = -D^{n+i}_{n+j}\widehat{dy^j}, \tag{31}$$

c'est-à-dire elle a les mêmes coefficients que la dérivation $\overset{\vee}{D}$ sur les fibrés VTM et $V^{\perp}TM$, dans les bases correspondantes dans les isomorphismes K et K^*.

4. Connexions semi-basiques

En considérant une connexion linéaire ∇ sur la variété TM, et en tenant compte que pour chaque $A \in \mathcal{D}^1(TM)$, ∇_A est une dérivation dans l'algèbre $\mathcal{D}(TM)$, nous pouvons appliquer les notions introduites et les résultats obtenus dans le chapitre précédant, aux connexions linéaires.

Définition 6. Une connexion linéaire ∇ sur la variété TM s'appelle *semi-basique* si elle préserve l'algèbre des champs de tenseurs semi-basiques.

Pour une connexion linéaire ∇ sur TM, en posant

$$\tau_A = J \circ \nabla_A \circ J,\ \forall A \in \mathcal{D}^1(TM), \tag{32}$$

on constate que τ est un champ de tenseurs semi-basiques de type (1,2) qui sera appelé *associé* à ∇. De proposition 6 on a

Proposition 11. *La connexion linéaire ∇ sur la variété TM est semi-basique si et seulement si le champ de tenseurs τ associé est nul.*

Dans ce cas la connexion ∇ induit par restriction une loi de dérivation dans la sous-algèbre $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ et par suite une connexion linéaire sur les fibrés VTM et $V^{\perp}TM$ qui sera notée par $\overline{\nabla}$.

Définition 7. La connexion ∇ s'appelle compatible avec la relation d'équivalence définie par J si et seulement si

$$T_1 \equiv T_2 (\operatorname{mod} J) \Longrightarrow \nabla_A T_1 \equiv \nabla_A T_2 (\operatorname{mod} J),\ \forall A \in \mathcal{D}^1(TM). \tag{33}$$

De proposition 8 il résulte

Proposition 12. *La connexion linéaire ∇ sur TM est compatible avec la relation d'équivalence définie par J si et seulement elle est semi-basique.*

Dans ce cas, en mettant

$$\overset{\vee}{\nabla}_A \bar{t} = \mu(\nabla_A T),\ \forall A \in \mathcal{D}^1(TM), \tag{34}$$

pour $\bar{t} \in \overline{\mathcal{D}}(TM)$ et $T \in \mathcal{D}(TM)$ tel que $\mu(T) = \bar{t}$, on obtient une loi de dérivation dans l'algèbre $\overline{\mathcal{D}}(TM)$ et par suite une connexion linéaire sur les fibrés VTM et $V^{\perp}TM$ qui sera nommé induite par ∇ par *transport* relatif à J et noté par $\overset{\vee}{\nabla}$. On constate que $\overline{\nabla}$ et $\overset{\vee}{\nabla}$ coïncident si et seulement si $\nabla J = 0$. On a, par suite

Proposition 13. *Une connexion linéaire ∇ sur la variété TM est semi-basique si et seulement si $J \circ \nabla J = 0$. Dans ce cas, elle induit par restriction et par transport relatif à J deux lois de dérivation $\overline{\nabla}$ et $\overset{\vee}{\nabla}$ dans l'algèbre $\overline{\mathcal{D}}(TM)$, qui coïncident si et seulement si $\nabla J = 0$.*

Soit dans une carte locale sur TM, la connexion linéaire donnée par

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \Gamma^i_{kj}\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma^{n+i}_{kj}\,\frac{\partial}{\partial y^i},\\
\nabla_{\partial/\partial y^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \Gamma^i_{n+k\,j}\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma^{n+i}_{n+k\,j}\,\frac{\partial}{\partial y^i},\\
\nabla_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \Gamma^i_{k\,n+j}\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma^{n+i}_{k\,n+j}\,\frac{\partial}{\partial y^i},\\
\nabla_{\partial/\partial y^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \Gamma^i_{n+k\,n+j}\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \Gamma^{n+i}_{n+k\,n+j}\,\frac{\partial}{\partial y^i}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

La connexion ∇ sera semi-basique si et seulement si

$$\Gamma^i_{k\,n+j} = \Gamma^i_{n+k\,n+j} = 0. \tag{36}$$

Dans ce cas, la loi de dérivation $\overline{\nabla}$ aura l'expression

$$
\begin{gathered}
\overline{\nabla}_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \Gamma^{n+i}_{k\,n+j}\,\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \overline{\nabla}_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \Gamma^{n+i}_{n+k\,n+j}\,\frac{\partial}{\partial y^i},\\
\overline{\nabla}_{\partial/\partial x^k}(dx^i) = -\Gamma^i_{kj}, \quad \overline{\nabla}_{\partial/\partial y^k}(dx^i) = -\Gamma^i_{n+k\,j}dx^j,
\end{gathered}
\tag{37}
$$

et $\overset{\vee}{\nabla}$ sera donnée par

$$
\begin{gathered}
\overset{\vee}{\nabla}_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \Gamma^i_{kj}\,\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \overset{\vee}{\nabla}_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \Gamma^i_{n+k\,j}\,\frac{\partial}{\partial y^i},\\
\overset{\vee}{\nabla}_{\partial/\partial x^k}(dx^i) = -\Gamma^{n+i}_{k\,n+j}dx^j, \quad \overset{\vee}{\nabla}_{\partial/\partial y^k}(dx^i) = -\Gamma^{n+i}_{n+k\,n+j}dx^j.
\end{gathered}
\tag{38}
$$

Les lois de dérivation $\overline{\nabla}$ et $\overset{\vee}{\nabla}$ coïncident si et seulement si

$$\Gamma^{n+i}_{k\,n+j} = \Gamma^i_{kj}, \quad \Gamma^{n+i}_{n+k\,n+j} = \Gamma^i_{n+k\,j}. \tag{39}$$

Soit N une connexion non linéaire fixée sur TM. Nous pouvons donner

Définition 8. On appelle *connexion de type Finsler associée à la connexion non linéaire N*, une connexion ∇ sur la variété TM qui préserve les distributions verticale et horizontale et induit, par restriction et transport relatif à J, la même connexion sur le fibré vertical.

De la proposition 10 il résulte

Proposition 14. *Une connexion linéaire ∇ sur TM est de type Finsler si et seulement si*

$$\nabla J = \nabla F = 0. \tag{40}$$

Donc, une connexion ∇ est de type Finsler si elle est semi-basique et préserve la distribution horizontale.

Localement une telle connexion est caractérisée par les conditions (36), (39) et

$$\tag{41} \begin{aligned} \Gamma_{kj}^{n+i} &= \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kh}^i N_j^h - \Gamma_{kj}^h N_h^i, \\ \Gamma_{n+k\,j}^{n+i} &= \frac{\partial N_j^i}{\partial y^k} + \Gamma_{n+k\,h}^i N_j^h - \Gamma_{n+k\,j}^h N_h^i. \end{aligned}$$

Dans la base $(\delta/\delta x^i, \partial/\partial y^i)$, adaptée à la connexion non linéaire N, une connexion de type Finsler a l'expression

$$\tag{42} \begin{aligned} \nabla_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) &= F_{kj}^i \,\frac{\delta}{\delta x^i}, \\ \nabla_{\partial/\partial y^k}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) &= C_{kj}^i \,\frac{\delta}{\delta x^i}, \end{aligned}$$

$$\tag{43} \begin{aligned} \nabla_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= F_{kj}^i \,\frac{\partial}{\partial y^i}, \\ \nabla_{\partial/\partial y^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= C_{kj}^i \,\frac{\partial}{\partial y^i}, \end{aligned}$$

où $F_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{n+h\,j}^i N_k^h$ et $C_{kj}^i = \Gamma_{n+k\,j}^i$.

Il en résulte que les connexions de type Finsler coïncident avec les d-connexions considérées par R. Miron en [7].

Remarque 1. Une connexion ∇ de type Finsler, associée à la connexion non linéaire N, induit par restriction une connexion sur les fibrés horizontal et vertical, données respectivement pr les formules (42) et (43). Réciproquement, une connexion non linéaire N et une connexion (43) sur le fibré vertical déterminent une connexion (42) sur le fibré horizontal et par suite une connexion de type Finsler sur TM. Donc, une connexion non linéaire N établit une bijection entre les connexions linéaires sur le fibré vertical et les connexions de type Finsler sur TM, associées à N. Comme une connexion non linéaire et une connexion sur le fibré vertical déterminent une connexion Finsler dans le sens de M. Matsumoto [4], il en résulte qu'il existe une bijection entre les connexions Finsler-Matsumoto et les connexions de type Finsler, associées à la même connexion non linéaire.

Une connexion semi-basique ∇ sur TM détermine en général deux connexions sur le fibré vertical et par suite, avec une connexion non linéaire N, deux connexions Finsler-Matsumoto. Ces deux connexions coïncident si et seulement si la connexion semi-basique préserve la distribution horizontale de N, c'est-à-dre si ∇ est de type Finsler.

En considérant les fibrés facteur WTM et $W^{\perp}TM$ on déduit qu'une connexion semi-basique ∇ sur TM induit sur ces fibrés la connexion $\overset{\wedge}{\nabla}$ donnée par

$$\tag{44} \overset{\wedge}{\nabla}_A B = \widehat{\nabla_A C}, \;\; \overset{\wedge}{\nabla}_A \overset{\wedge}{\beta} = \widehat{\nabla_A \gamma}, \;\; \forall\, A \in \mathcal{D}^1(TM)$$

où $C \in \mathcal{D}^1(TM)$ et $\gamma = \mathcal{D}_1(TM)$ tels que $p(C) = \hat{B}$ et $p^*(\gamma) = \overset{\wedge}{\beta}$.

Localement, on a

$$\stackrel{\wedge}{\nabla}_{\partial/\partial x^k}\left(\frac{\stackrel{\wedge}{\partial}}{\partial x^j}\right) = \Gamma^i_{kj}\,\frac{\stackrel{\wedge}{\partial}}{\partial x^i},$$

$$(45) \qquad \stackrel{\wedge}{\nabla}_{\partial/\partial y^k}\left(\frac{\stackrel{\wedge}{\partial}}{\partial x^j}\right) = \Gamma^i_{n+k\,j}\,\frac{\stackrel{\wedge}{\partial}}{\partial x^i},$$

$$\stackrel{\wedge}{\nabla}_{\partial/\partial x^k}\left(\widehat{dy^i}\right) = -\Gamma^{n+i}_{k\,n+j}\widehat{dy^j},$$

$$(46) \qquad \stackrel{\wedge}{\nabla}_{\partial/\partial y^k}\left(\widehat{dy^i}\right) = -\Gamma^{n+i}_{n+k\,n+j}\widehat{dy^j}.$$

Cette connexion a les mêmes coefficients que la connexion $\stackrel{\vee}{\nabla}$ sur VTM et $V^{\perp}TM$, dans les bases correspondantes par les isomorphismes K et K^*.

On peut remarquer les relations

$$(47) \qquad \begin{gathered} \stackrel{\vee}{\nabla}_A \circ J - J \circ \nabla_A = 0, \quad \stackrel{\wedge}{\nabla}_A \circ p - p \circ \stackrel{\wedge}{\nabla}_A = 0, \\ \stackrel{\vee}{\nabla}_A \circ K - K \circ \stackrel{\wedge}{\nabla}_A = 0, \quad \forall\, A \in \mathcal{D}^1(TM) \end{gathered}$$

exprimant la propriété que, pour une connexion semi-basique ∇, les couples de connexions $(\stackrel{\vee}{\nabla}, \nabla)$, $(\stackrel{\wedge}{\nabla}, \nabla)$ et $(\stackrel{\vee}{\nabla}, \stackrel{\wedge}{\nabla})$ sont conjuguées [2] respectivement par rapport aux morphismes J, p et K.

On peut vérifier facilement que l'ensemble des champs de tenseurs de type (1,1) qui définissont les dérivations semi-basiques forment un sous-module $\overline{\mathcal{D}}^1_1(TM) \subset \mathcal{D}^1_1(TM)$ et que l'ensemble des dérivations semi-basiques forment un sous-module $\overline{\mathrm{Der}}(\mathcal{D}(TM)) \subset \mathrm{Der}(\mathcal{D}(TM))$ sur $\mathcal{F}(TM)$. En notant par ρ l'application de $\mathrm{Der}(\mathcal{D}(TM))$ en $\mathcal{D}^1(TM)$ qui associe à chaque dérivation sa restriction à $\mathcal{F}(TM)$ et en tenant compte que sur TM il existe des connexions semi-basiques, il résulte qu'on a la suite exacte de $\mathcal{F}(M)$-modules

$$(48) \qquad 0 \longrightarrow \overline{\mathcal{D}}^1_1(TM) \xrightarrow{\;i\;} \overline{\mathrm{Der}}(\mathcal{D}(TM)) \xrightarrow{\;\rho\;} \mathcal{D}^1(TM) \longrightarrow 0.$$

Une connexion semi-basique ∇ sur TM peut être caractérisée comme une scission à la droite de cette suite exacte. Une remarque similaire peut être faite sur les connexions de type Finsler.

BIBLIOGRAPHIE

1. Anastasiei, M., *Finsler geometric objects and their Lie derivative*, Proc. of the Nat. Sem. on Finsler spaces, Braşov, 1980, 11-25.
2. Cruceanu, V., *Connexions compatibles avec certaines structures sur un fibré vectoriel banachique*, Czechoslovak Math. J., 24 (1974), 126-142.
3. Griffone, J., *Structure presque-tangente et connexions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 22, (1) (1972), 287-334, 22 (3) (1972), 291-338.
4. Matsumoto, M., *The theory of Finsler connexions*, Publ. of the Study Group Geom. Okayama Univ. 1970.

5. Miron, R., *Introduction to the theory of Finsler spaces*, Proc. of the Nat. Sem. on Finsler spaces, Braşov, 1980, 131-183.

6. Miron, R., Anastasiei, M., *On the notion of Finsler geometric objects*, Mem. Acad. R.S.R., vol. IV, 1981.

7. Miron, R., *A Lagrangian theory of relativity*, Seminarul de geometrie şi topologie, Univ. din Timişoara, 84 (1985).

8. Mok, K.-P., Patterson, E., Wong, Y.-C., *Structure of symmetric tensors of type* $(0,2)$ *and tensors of type* $(1,1)$ *on the tangent bundle*, Trans. Amer. Math. Soc. 234 (1977), 253-275.

9. Schapukov, B.N., *Connexions sur les fibrés différentiables*, Itogy Nauky. Problemy geometry. 15 (1975), 61-93.

10. Wong, Y.-C., Mok, K.-P., *Connections and M-tensors on the tangent bundle* TM, in Topics in Differential Geometry, Academic Press, New York 1976, 157-172.

11. Yano, K., Ishihara, S., *Tangent and Cotangent Bundles, Differential Geometry*, M. Dekker Inc., New York, 1973.