# 26 Une classe de structures géométriques sur le fibré cotangent

Tensor, N.S.,
vol. 53 (1993), 196-201.

**Introduction.** Le fibré cotangent à une variété différentiable présente un intérêt spécial par la richesse des structures géométriques qu'il possède et par les propriétés remarquables de ces structures. Dans ce travail nous proposons de compléter et d'unifier une série de résultats connus [6], [7], [9]-[12] concernant ces structures et de les intégrer dans des structures plus complexes définies par des objets donnés sur la variété base. On en obtient de cette manière des exemples significatifs pour certaines structures géométriques beaucoup étudiées et récemment classifiées [1]-[5], [8] ainsi que pour d'autres structures importantes qui sont moins connues.

**§1. Definitions et notations.** Soit $\pi : T^*M \longrightarrow M$ le fibré cotangent à une variété $M$ de classe $C^\infty$ et dimension $n$. Notons par $\mathcal{F}(M)$ l'anneau des fonctions réelles $C^\infty$ et par $\mathcal{D}^r_s(M)$ le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de tenseurs de type $(r, s)$ sur $M$. A une carte locale $(U, \varphi)$ sur $M$, avec $\varphi(p) = (x^i)$, il correspond sur $T^*M$ la carte $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ avec $\Phi(\alpha_p) = (q^i, p_i)$, où $q^i = x^i \circ \pi$ et $\alpha_p = p_i dx^i$. Nous avons doné sur $\pi^{-1}(U)$ les bases naturelles reciproques ($\partial_i = \partial/\partial q^i$, $\dot{\partial}_i = \partial/\partial p_i$) et $(dq^i, dp_i)$. Pour $f \in \mathcal{F}(M)$, soit $f^v = f \circ \pi$ son relèvement vertical.

Soient ensuite $i : \mathcal{D}^1_s(M) \longrightarrow \mathcal{D}_s(T^*M)$ et $\gamma : \mathcal{D}^1_{1+s}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^1_s(T^*M)$ les applications donnèes par

$$i(T^i_{j_1 \cdots j_s} \partial/\partial x^i \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s})_{\alpha_p} = p_i T^i_{j_1 \cdots j_s}(p) dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_s},$$
$$\gamma(T^i_{jj_1 \cdots j_s} \partial/\partial x^i \otimes dx^j \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s})_{\alpha_p} = p_i T^i_{jj_1 \cdots j_s}(p) \dot{\partial}^j \otimes dq^{j_1} \otimes \cdots \otimes dq^{j_s},$$

Pour $Z \in \mathcal{D}^1(M)$ et $S \in \mathcal{D}^1_1(M)$ on a

$$i(Z)_{\alpha_p} = p_i Z^i(p), \ i(S)_{\alpha_p} = p_i S^i_j(p) dq^j, \ \gamma(S)_{\alpha_p} = p_i S^i_j(p) \dot{\partial}^j.$$

En particulier, pour $S = I$, le champ de Kronecker, on obtient l'1-*forme canonique* $\sigma = i(I)$ et le *champ de vecteurs canonique* $C = \gamma(I)$, avec les expressions locales

$$\sigma = p_i dq^i, \ C = p_i \dot{\partial}^i.$$

Les fonctions sur $T^*M$ de la forme $i(Z)$, avec $Z \in \mathcal{D}^1(M)$, jouent un rôle important parce que tout champ de vecteurs sur $T^*M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur ces fonctions. Par exemple, le champ de vecteurs canonique peut être caractérise par

$$C(iZ) = iZ, \ \forall\, Z \in \mathcal{D}^1(M).$$

Pour une 1-forme $\omega \in \mathcal{D}^1(M)$, s'appelle le *relèvement vertical*, le champ de vecteurs $\omega^v$ sur $T^*M$ donné par

$$\omega^v(iZ) = \omega(Z)^v, \ \forall\, Z \in \mathcal{D}^1(M).$$

En posant $\omega = \omega_i dx^i$ on obtient pour $\omega^v$ l'expression locale $\omega^v = \omega_i \dot{\partial}^i$. Pour $\omega = dx^i$ on a

$$(dx^i)^v = \dot{\partial}^i.$$

**§2. Structure presque parahermitienne.** En considérant une connexion linéaire $\nabla$ sur $M$, nous pouvons définir le relèvement horizontal pour un champ de vecteurs $X \in \mathcal{D}^1(M)$ par

$$X^h(iZ) = i(\nabla_X Z), \ \forall\, Z \in \mathcal{D}^1(M).$$

On en obtient l'expression locale $X^h = X^i(\partial_i + \Gamma_{ij}\dot{\partial}^j)$ où $\Gamma_{ij} = \Gamma^k_{ij} p_k$.

En particulier pour $X = \partial/\partial x^i$ on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h = \delta_i = \partial_i + \Gamma_{ij}\dot{\partial}^j.$$

Quand $\omega$ parcourt $\mathcal{D}_1(M)$ et $X \in \mathcal{D}^1(M)$, alors $\omega^v$ engendre la distribution verticale $VT^*M$ et $X^h$ la distribution horizontale $HT^*M$. Tout champ de tenseurs de type $(0,s)$ ou $(1,s)$ sur $T^*M$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les champs de vecteurs de la forme $\omega^v$ et $X^h$, avec $\omega \in \mathcal{D}_1(M)$ et $X \in \mathcal{D}^1(M)$. On appelle le *relèvement horizontal* pour $\omega \in \mathcal{D}_1(M)$ et le *relèvement vertical* pour $X \in \mathcal{D}^1(M)$, respectivement les 1-formes $\omega^h$ et $X^v$ sur $T^*M$ donnèes par

$$\omega^h(Z^h) = \omega(Z)^v, \ \omega^h(\alpha^v) = 0; \ X^v(Z^h) = 0, \ X^v(\alpha^v) = \alpha(X)^v.$$

On en obtient les expressions locales

$$\omega^h = \omega_i dq^i, \ X^v = X^i(dp_i - \Gamma_{ji} dq^j).$$

En particulier on a

$$(dx^i)^h = dq^i, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^v = \delta p_i = dp_i - \Gamma_{ji} dq^j.$$

Donc à la carte locale $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ sur $T^*M$ on peut associer les *bases naturelles réciproques adaptées à la connexion* $\nabla$, donnèes par $(\delta_i, \dot{\partial}^i)$ et $(dq^i, \delta p_i)$. Pour $f \in \mathcal{F}(M)$, $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_1(M)$, $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$, et $S, T \in \mathcal{D}^1_1(M)$ on a les formules utiles:

$$\begin{gathered}
\alpha^v(f^v) = 0, \ [\alpha^v, \beta^v] = 0, \ [\alpha^v, \gamma S] = (\alpha \circ S)^v, \\
[\gamma S, \gamma T] = \gamma[S, T], \ X^h(f^v) = X(f)^v, \ [X^h, Y^h] = [X, Y]^h + \gamma R_{XY}, \\
[X^h, \alpha^v] = (\nabla_X \alpha)^v, \ [X^h, \gamma S] = \gamma(\nabla_X S),
\end{gathered}$$

où $R_{XY} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ est le tenseur de courbure de la connexion $\nabla$.

A la connexion linéaire $\nabla$ on peut associer la structure presque paracomplexe $F$, la structure pseudoriemannienne $\Omega$ et la structure presque symplectique $\Theta$ qui, considérées comme 1-formes vectorielles, sont donnèes par

$$\begin{aligned}
&F(X^h) = -X^h, \quad F(\alpha^v) = \alpha^v; \quad \Omega(X^h) = X^v, \quad \Omega(\alpha^v) = \alpha^h; \\
&\Theta(X^h) = -X^v, \quad \Theta(\alpha^v) = \alpha^h.
\end{aligned} \tag{1}$$

Pour $\Omega$ et $\Theta$, considérées comme champs de tenseurs de type (0,2) sur $T^*M$, donnèes par $\Omega(A,B) = \Omega(B)(A)$ et $\Theta(A,B) = \Theta(B)(A)$, nous avons aussi les caractérisations

$$\begin{aligned}
&\Omega(X^h, Y^h) = \Omega(\alpha^v, \beta^v) = 0, \quad \Omega(X^h, \beta^v) = \Omega(\beta^v, X^h) = \beta(X)^v, \\
&\Theta(X^h, Y^h) = \Theta(\alpha^v, \beta^v) = 0, \quad \Theta(X^h, \beta^v) = -\Theta(\beta^v, X^h) = \beta(X)^v.
\end{aligned}$$

Les champs de tenseurs $F, \Omega$ et $\Theta$ ont respectivement les expressions locales

$$\begin{aligned}
&F = -\delta_i \otimes dq^i + \dot{\partial}^i \otimes \delta p_i, \quad \Omega = dq^i \otimes \delta p_i + \delta p_i \otimes dq^i, \\
&\Theta = dq^i \otimes \delta p_i - \delta p_i \otimes dq^i
\end{aligned}$$

et satisfont les conditions:

$$\begin{aligned}
&F^2 = I, \ \operatorname{tr} F = 0, \ {}^t\Omega = \Omega, \ \Omega \circ F \times F = -\Omega, \ \Theta = \Omega \circ I \times F, \\
&{}^t\Theta = -\Theta, \ \Theta \circ F \times F = -\Theta
\end{aligned}$$

où $I$ est le tenseur de Kronecker sur $T^*M$. On a donc

**Proposition 1.** *Une connexion linéaire $\nabla$ sur la variété $M$ déterminé par les relations* (1) *une structure presque parahermitienne $(F, \Omega, \Theta)$ sur la variété $T^*M$.*

**§3. Structure presque antiquaternionique.** Soient, à côté de la connexion linéaire $\nabla$, un champ de tenseurs $g \in \mathcal{D}_2^0(M)$ nonsingulier et $\bar{g}$ son réciproque. Alors en posant

$$P(X^h) = g(X)^v, \ P(\alpha^v) = \widetilde{g}(\alpha)^h; \ J(X^h) = g(X^v), \ J(\alpha^v) = -\widetilde{g}(\alpha)^h, \tag{2}$$

on obtient sur $T^*M$ une structure presque paracomplexe $P$ et une structure presque complexe $J$ avec les expressions locales

$$P = g_{ij}\dot{\partial}^i \otimes dq^j + \widetilde{g}^{ij}\delta_i \otimes \delta p_j, \ J = g_{ij}\dot{\partial}^i \otimes dq^j - \widetilde{g}^{ij}\delta_i \otimes \delta p_j.$$

On en obtient les relations

$$\begin{aligned}
&F^2 = P^2 = -J^2 = I, \ \operatorname{tr} F = \operatorname{tr} P = \operatorname{tr} J = 0, \\
&F \circ P = -P \circ F = J, \ F \circ J = -J \circ P, \ J \circ P = -P \circ J = F.
\end{aligned}$$

Par suite il en résulte

**Proposition 2.** *Une connexion linéaire $\nabla$ et un champ de tenseurs $g$ de type* $(0,2)$ *nonsingulier, sur $M$, déterminent par les relations* $(1)_1$ *et* (2) *une structure presque antiquaternionique sur $T^*M$.*

Aussi à l'aide de la connexion $\nabla$ et du champ de tenseurs $g \in \mathcal{D}_2^0(M)$ nonsingulier, en posant

$$H(X^h) = g(X)^h, \ H(\alpha^v) = \widetilde{g}(\alpha)^v, \ K(X^h) = g(X)^h, \ K(\alpha^v) = -\widetilde{g}(\alpha)^v, \tag{3}$$

on obtient deux champs de tenseurs de type $(0,2)$ sur $T^*M$. Ils peuvent être caractérises par les relations

$$\begin{aligned}
&H(X^h, Y^h) = g(X,Y)^v, && H(X^h, \alpha^v) = H(\alpha^v, X^h) = 0, \\
&H(\alpha^v, \beta^v) = \widetilde{g}(\alpha, \beta)^v, && K(X^h, Y^h) = g(X,Y)^v, \\
&K(X^h, \alpha^v) = K(\alpha^v, X^h) = 0, && K(\alpha^v, \beta^v) = -\widetilde{g}(\alpha, \beta)^v.
\end{aligned} \tag{4}$$

Pour ces tenseurs on obtient les expressions locales

$$H = g_{ij}dq^i \otimes dq^j + \widetilde{g}^{ij}\delta p_i \otimes \delta p_j, \quad K = g_{ij}dq^i \otimes dq^j - \widetilde{g}^{ij}\delta p_i \otimes \delta p_j.$$

On a donc

**Proposition 3.** *Une connexion linéaire $\nabla$ et un champ de tenseurs $g$ de type $(0,2)$ nonsingulier, sur $M$, déterminent par les relations (3) ou (4) deux structures $H$ et $K$ sur $T^*M$ qui sont pseudoriemanniennes ou presque symplectiques en même temps que $g$.*

Remarquons les relations

$$\Theta = \Omega \circ F, \quad H = \Omega \circ P, \quad K = \Omega \circ J.$$

**§4. Autres structures.** Les champs de tenseurs $F, P, J$ de type $(1,1)$ et $\Omega, \Theta, H, K$ de type $(0,2)$ sur $T^*M$, définis par une connexion linéaire $\nabla$ et un champ de tenseurs $g$ de type $(0,2)$, nonsingulier sur $M$, à l'aide des formules (1), (2) et (3), sont liés par certaines relations et déterminent sur la variété $T^*M$ des structures géométriques importantes. Ces structures sont présentées dans les deux tableaux suivants, correspondants aux cas ou $g$ est symétrique ou antisymétrique.

a) Pour $g$ symétrique, $\Omega, H, K$ sont symétriques, $\Theta$ est antisymétrique et on a

| | $F$ | $P$ | $J$ |
|---|---|---|---|
| $\Omega$ | ${}^tF\circ\Omega\circ F = -\Omega$<br>$\Omega\circ F = \Theta$<br>$(F,\Omega,\Theta) = p.p.h.$ | ${}^tP\circ\Omega\circ P = \Omega$<br>$\Omega\circ P = H$<br>$(P,\Omega,H) = p.p.c.m.$ | ${}^tJ\circ\Omega\circ J = \Omega$<br>$\Omega\circ J = K$<br>$(J,\Omega,K) = p.c.m.$ |
| $\Theta$ | ${}^tF\circ\Theta\circ F = -\Theta$<br>$\Theta\circ F = \Omega$<br>$(F,\Theta,\Omega) = p.p.h.$ | ${}^tP\circ\Theta\circ P = -\Theta$<br>$\Theta\circ P = K$<br>$(P,\Theta,K) = p.p.h.$ | ${}^tJ\circ\Theta\circ J = \Theta$<br>$\Theta\circ J = H$<br>$(J,\Theta,H) = p.(p).h.$ |
| $H$ | ${}^tF\circ H\circ F = H$<br>$H\circ F = -K$<br>$(F,H,-K) = p.p.c.m.$ | ${}^tP\circ H\circ P = H$<br>$H\circ P = \Omega$<br>$(P,H,\Omega) = p.p.c.m.$ | ${}^tJ\circ H\circ J = H$<br>$H\circ J = -\Theta$<br>$(J,H,-\Theta) = p.(p).h.$ |
| $K$ | ${}^tF\circ K\circ F = K$<br>$K\circ F = -H$<br>$(F,K,-H) = p.p.c.$ | ${}^tP\circ K\circ P = -K$<br>$K\circ P = \Theta$<br>$(P,K,\Theta) = p.p.h.$ | ${}^tJ\circ K\circ J = -K$<br>$K\circ J = -\Omega$<br>$(J,K,-\Omega) = p.c.m$ |

b) Pour $g$ antisymétrique, $\Omega$ est symétrique, $\Theta, H, K$ sont antisymétriques et on obtient

| | $F$ | $P$ | $J$ |
|---|---|---|---|
| $\Omega$ | ${}^tF\circ\Omega\circ F = -\Omega$<br>$\Omega\circ F = \Theta$<br>$(F,\Omega,\Theta) = p.p.h.$ | ${}^tP\circ\Omega\circ P = -\Omega$<br>$\Omega\circ P = H$<br>$(P,\Omega,H) = p.p.h.$ | ${}^tJ\circ\Omega\circ J = \Omega$<br>$\Omega\circ J = K$<br>$(J,\Omega,K) = p.(p).h.$ |
| $\Theta$ | ${}^tF\circ\Theta\circ F = -\Theta$<br>$\Theta\circ F = \Omega$<br>$(F,\Theta,\Omega) = p.p.h.$ | ${}^tP\circ\Theta\circ P = \Theta$<br>$\Theta\circ P = K$<br>$(P,\Theta,K) = p.p.c.p.s.$ | ${}^tJ\circ\Theta\circ J = -\Theta$<br>$\Theta\circ J = H$<br>$(J,\Theta,H) = p.c.p.s.$ |
| $H$ | ${}^tF\circ H\circ F = H$<br>$H\circ F = -K$<br>$(F,H,-K) = p.p.c.p.s.$ | ${}^tP\circ H\circ P = -H$<br>$H\circ P = \Omega$<br>$(P,H,\Omega) = p.p.h.$ | ${}^tJ\circ H\circ J = -H$<br>$H\circ J = -\Theta$<br>$(J,H,-\Theta) = p.c.p.s.$ |
| $K$ | ${}^t\circ K\circ F = K$<br>$K\circ F = -H$<br>$(F,K,-H) = p.p.c.p.s.$ | ${}^tP\circ K\circ P = K$<br>$K\circ P = \Theta$<br>$(P,K,\Theta) = p.p.c.p.s.$ | ${}^tJ\circ K\circ J = K$<br>$K\circ J = -\Omega$<br>$(J,K,-\Omega) = p.(p).h.$ |

Dans ces tableaux nous avons considéré $F, P, J, \Omega, \Theta, H, K$ comme des 1-formes vectorielles sur $T^*M$ et nous avons utilisé les abréviations suivantes:

| | |
|---|---|
| p.p.h. | pour une structure presque parahermitienne |
| p.p.c.m. | pour une structure presque paracomplexe métrique |
| p.p.c.p.s. | pour une structure presque paracomplexe presque symplectique |
| p.(p).h. | pour une structure pseudohermitienne |
| p.c.m. | pour une structure presque complexe métrique |
| p.c.p.s. | pour une structure presque complexe presque symplectique |

**§5. Intégrabilité.** Cherchons maintenant les conditions d'intégrabilité pour les structures considérées. Pour les tenseurs de Nijenhuis des champs $F, P$ et $J$ on obtient:

$$
\begin{aligned}
&N_F(X^h, Y^h) = 4\gamma R_{XY},\ N_F(X^h, \beta^v) = 0,\ N_F(\alpha^v, \beta^v) = 0,\\
&N_P(X^h, Y^h) = -(\widetilde{g} \circ Dg(X,Y))^h + \gamma R_{XY},\\
&N_P(X^h, \beta^v) = Dg(X, \widetilde{g}\beta)^v - P(\gamma R_{x\widetilde{g}\beta}),\\
&N_P(\alpha^v, \beta^v) = -(\widetilde{g} \circ Dg(\widetilde{g}\alpha, \widetilde{g}\beta))^h + \gamma R_{\widetilde{g}\alpha\widetilde{g}\beta},\\
&N_J(X^h, Y^h) = -N_P(X^h, Y^h),\\
&N_J(X^h, \beta^v) = -N_P(X^h, \beta^v),\ N_J(\alpha^v, \beta^v) = N_P(\alpha^v, \beta^v),
\end{aligned}
$$

où

$$Dg(X,Y) = \nabla_X(g(Y)) - \nabla_Y(g(X)) - g([X,Y])$$

est la différentielle covariante extérieure de l'1-forme vectorielle $g$. Par suite on a

**Proposition 4.** *La structure presque paracomplexe $F$ est intégrable si et seulement si la connexion $\nabla$ est sans courbure. Les structures presque paracomplexe $P$ et presque complexe $J$ sont simultanément intégrables, à savoir si et seulement si la différentielle covariante extérieure de $g$ et la courbure de $\nabla$ sont nulles.*

Pour la différentielle extérieure de $\theta$ on obtient

$$
\begin{aligned}
3d\Theta(X^h, Y^h, Z^h) &= i(R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y),\\
3d\Theta(X^h, Y^h, \alpha^v) &= \alpha(T(X,Y))^v,\\
d\Theta(X^h, \beta^v, \gamma^v) &= d\Theta(\alpha^v, \beta^v, \gamma^v) = 0,
\end{aligned}
$$

où $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ est le tenseur de torsion de la connexion $\nabla$.

On a donc

**Proposition 5.** *La structure presque symplectique $\theta$ est intégrable si et seulement si la connexion $\nabla$ est sans torsion. Dans ce cas $\Theta$ est exacte et donnée par $\Theta = -2d\sigma$, où $\sigma$ est l'1-forme canonique.*

Si $g$ est antisymétrique on obtient pour la différentielle extérieure des 2-formes $H$ et $K$

$$dH(X^h, Y^h, Z^h) = dg(X, Y, Z)^v,\ 3dH(X^h, Y^h, \alpha^v) = -i(R_{XY}\widetilde{g}\alpha),$$
$$3dH(X^h, \beta^v, \gamma^v) = (\nabla_X \widetilde{g})(\beta, \gamma)^v,\ dH(\alpha^v, \beta^v, \gamma^v) = 0,$$
$$dK(X^h, Y^h, Z^h) = dH(X^h, Y^h, Z^h),\ dK(X^h, Y^h, \alpha^v) = -dH(X^h, Y^h, \alpha^v),$$
$$dK(X^h, \beta^v, \gamma^v) = -dH(X^h, \beta^v, \gamma^v),\ dK(\alpha^v, \beta^v, \gamma^v) = 0.$$

Par suite on a

**Proposition 6.** *Pour $g$ antisymétrique les structures presque symplectiques $H$ et $K$ sont simultanément intégrables, à savoir si et seulement si $g$ est intégrable et covariant constante et la connexion $\nabla$ est sans courbure.*

En partant des tableaux a) et b) et des conditions d'intégrabilité précédentes on peut trouver des exemples significatifs pour la classification des structures: presque hermitiennes, donnèes par P. Libermann [5], A. Gray et L.M. Hervella [4]; presque parahermitiennes, donnée par C.L. Bejan [1], P.M. Gadea et J.M. Masqué [2]; presque complexes métriques, obtenues par G.T. Ganchev et A.V. Borisov [3]; presque paracomplexes métriques, obtenues par A.M. Naveira [8]. On peut obtenir aussi des exemples pour les structures presque complexes (ou paracomplexes) presque symplectiques, qui d'après notre connaissance, n'ont pas encore été classifiées.

REREFERENCE


1. C.L. Bejan, *A classification of almost para-Hermitian manifolds*, Proc. Diff. Geom. and Its Appl. Dubrovnik, 1988, 23-27.
2. P.M. Gadea and J.M. Masqué, *Classification of almost para-Hermitian manifolds*, Rend. Mat., Roma, 11 (1991), 377-396.
3. G. Ganchev and A. Borisov, *Note on the almost complex manifolds with a Norden metric*, C.R. Acad. Bulg. Sci., 39 (1986), 31-34.
4. A. Gray and L.H. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura Appl., 123 (1980), 35-58.
5. P. Libermann, *Sur la classification des structures hermitiennes*, Colloq. Geom. Dif. Santiago de Compostela, (1978), 168-191.
6. R. Miron, *Hamilton Geometry.* Seminarul de Mecanică, Univ. Timişoara, nr. 3, 1987.
7. K.P. Mok, *Metrics and connections on the cotangent bundle*, Kodai Math. Sem. Rep., 28 (1977), 226-238.
8. A.M. Naveira, *A classification of Riemannian almost-product manifolds*, Rend. Mat. Roma., 3 (1983), 577-592.
9. V. Oproiu and N. Papaghiuc, *On the differential geometry of the Legendre transformation*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 57 (1987), 35-49.
10. E.M. Patterson and A.G. Walker, *Riemann extensions*, Quart. J. Math., (2), (3), Oxford, (1952), 19-28.
11. F. Tondeur, *Structure presque kählérienne naturelle sur le fibré des vecteurs covariants d'une variété riemannienne*, C.R.A.S. Paris, 254 (1962), 407-408.
12. K. Yano and S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles, differential geometry*, Marcel Dekker, New York, 1973.